

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ  
ΣΧΟΛΗ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

## ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διακλαδική ανάλυση συστήματος  
με τη θεωρία των καταστροφών

Φοιτήτρια

N. Κέφου

Επιβλέπων

Δ. Σ. Σοφιανόπουλος

Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ

Βόλος, Φεβρουάριος 2010

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ  
ΣΧΟΛΗ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Διακλαδική ανάλυση συστήματος  
με τη θεωρία των καταστροφών

Φοιτήτρια

N. Κέφου

Επιβλέπων

Δ. Σ. Σοφιανόπουλος

Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ

Βόλος, Φεβρουάριος 2010

## Πίνακας περιεχομένων

1) Πρόλογος.....	3
2) Κεφάλαιο Α - Θεωρία Καταστροφών.....	4
• α1) Η έννοια της μη γραμμικότητας.....	4
• α2) Στοιχεία της θεωρίας των καταστροφών	
• α2.1) Γενικές έννοιες- ορισμοί .....	4
• α2.2) Κατάταξη των καταστροφών .....	13
3) Κεφάλαιο Β - Θεωρία Διακλαδώσεων .....	23
• α) Γενικοί ορισμοί και επισημάνσεις.....	23
• β) Η ενεργειακή μέθοδος.....	28
• γ) Ο ρόλος των μαθηματικών προσομοιωμάτων.....	33
• δ) Ατέλειες και διαταραγμένες διακλαδώσεις.....	46
4) Κεφάλαιο Γ - Περιγραφή και ανάλυση του μονοβάθμιου προσομοιώματος.....	52
• 3.1-3.4) Γεωμετρία - φόρτιση - χαρακτηριστικά-εξισώσεις.....	52
• 3.5) Το «πλήρως τέλειο» σύστημα ( $\alpha=\beta=\varepsilon=0$ ) .....	56
• 3.6) Χρήση δύο μη μηδενικών παραμέτρων ελέγχου.....	57
• 3.7) Χρήση τριών μη μηδενικών παραμέτρων ελέγχου .....	71
• 3.8) Χρήση όλων των παραμέτρων ελέγχου .....	122
• 3.9) Επιφάνειες πολλαπλών καταστροφής .....	132
5) Συμπεράσματα .....	134
6) Βιβλιογραφία .....	135

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ : Αντικείμενο και σκοπός της εργασίας**

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία πραγματεύεται την μη γραμμική διακλαδική ανάλυση ευστάθειας ενός μονοβάθμιου (γενικά ατελούς) συντηρητικού συστήματος με χρήση της θεωρίας των Καταστροφών. Η συνάρτηση συνολικού δυναμικού του εν λόγω συστήματος, το οποίο αποτελεί προσομοίωμα ασυμπίεστου ελαστικού στύλου με απλές ελαστικές στηρίξεις, περιέχει τέσσερεις παραμέτρους ελέγχου και μια ενεργή συντεταγμένη, και χαρακτηρίζεται από την παρουσία όλων των ειδών των διακριτών κρίσιμων σημείων (διακλαδικών και οριακών).

Αναλυτικότερα, η όλη εργασία αποτελείται από τρία Κεφάλαια.

Στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρατίθεται συνοπτικά το θεωρητικό υπόβαθρο επί του οποίου βασίζεται η εργασία με ιδιαίτερη έμφαση σε βασικά στοιχεία της θεωρίας των Καταστροφών, ενώ στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρατίθενται έννοιες και ορισμοί για την ανάλυση συστημάτων μέσω της θεωρίας των διακλαδώσεων. Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο μελετάται η ανάλυση του συστήματος με χρήση του κολοβωμένου συνολικού δυναμικού και αποδεικνύεται ο συσχετισμός του με Καταστροφές τύπου χελιδονοουράς και τύπου πεταλούδας.

Η εργασία συνοδεύεται από ενδεικτική βιβλιογραφία και Παράρτημα συμβολικών υπολογισμών.

Βόλος, Φεβρουάριος 2010

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α' : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ - ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ**

### **A.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ**

Στη Μηχανική των Παραμορφωσίμων Σωμάτων *η μη γραμμικότητα* οφείλεται είτε *στη φύση του υλικού* (σχέση τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης, material nonlinearity) είτε σε καθαρά *γεωμετρικούς λόγους* (geometric nonlinearity). Κατά τα άλλα, *η γραμμική θεωρία ευστάθειας* (λυγισμού) για φορείς από γραμμικώς ελαστικά υλικά (που ακολουθούν το νόμο του Hooke) είναι ουσιαστικά *μη γραμμική ανάλυση* (καλούμενη και στατική 2<sup>ης</sup> τάξης), καθόσον - σε αντίθεση με τη κλασσική στατική 1<sup>ης</sup> τάξης - η ισορροπία αυτών λαμβάνεται στην παραμορφωμένη κατάσταση. Επιπρόσθετα, η *“μη γραμμικότητα”* στη μη γραμμική θεωρία ευστάθειας συνδέεται με ακριβέστερες εκφράσεις στις σχέσεις που δίδουν την ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon$  και τη καμπυλότητα  $\kappa$ . Ανάλογα δε με την ακρίβεια των εκφράσεων αυτών, η εν λόγω θεωρία διακρίνεται σε θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων και σε θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων, η τελευταία γνωστή και σαν *θεωρία 3<sup>ης</sup> τάξης*, ενώ διεθνώς αναφέρεται ως *Elastica* και συνδέεται με την έννοια της ευστάθειας σε μεγάλες μετατοπίσεις - διαταραχές (stability in the large).

### **A.2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ**

#### **A.2.1. Γενικές έννοιες - ορισμοί**

##### **(a) Ιστορικό**

Τα φαινόμενα αστάθειας, τα οποία λαμβάνουν χώρα με μια πληθώρα διαφορετικών τρόπων σε όλες της Εφαρμοσμένες Επιστήμες, καταλαμβάνουν ίσως την κορυφαία θέση μεταξύ του ενδιαφέροντος των ερευνών. Την τελευταία τριακονταετία, μια εντυπωσιακή συνεργασία μεταξύ ερευνητών των παραπάνω Επιστημών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είχαν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας ενοποιημένης προσέγγισης όλων των ασταθειών, με την ανάπτυξη των νέων ιδεών της Θεωρίας Διακλαδώσεων και της Θεωρίας των Καταστροφών. Ιδιαίτερα όσον αφορά τη δεύτερη εξ

αυτών, και παρ' όλες τις διαφορετικές και κατά καιρούς διωταμένες απόψεις για την εφαρμοσιμότητα της στη Βιολογία και τις Κοινωνικές Επιστήμες, αποτελεί αυτή τη στιγμή μια αυστηρά θεμελιωμένη θεωρία, μετά την τελειοποίηση και εξέλιξη της από κορυφαίους μαθηματικούς και τοπο-λόγους

Όντως η Θεωρία των Καταστροφών είναι ευρύτατα αποδεκτή, καθόσον προσφέρει μια γενική μέθοδο για τη μελέτη αλμάτων (jumps), ασυνεχειών (discontinuities) και απότομων ποιοτικών αλλαγών (sudden qualitative changes) τόσο στη στατική όσο και στη δυναμική απόκριση των συστημάτων. Πέραν αυτών, οι γνώσεις που αποκτώνται μέσω της Θεωρίας αυτής είναι γενικότερης ισχύος, οπότε δεν υφίσταται ανάγκη σε βάθος ανάλυσης του εκάστοτε συστήματος, παρά μόνο μελέτη οικογενειών συστημάτων, των οποίων η συμπεριφορά διέπεται από την συνήθη (κανονική) μορφή *συναρτήσεων Συνολικού Δυναμικού*, οι οποίες σύμφωνα με τη Θεωρία αυτή είναι **απόλυτα καταταγμένες και συσχετισμένες**, με εκ των προτέρων γνωστές ιδιότητες. Κατά συνέπεια, το μέγιστο βήμα στη μελέτη προβλημάτων ευστάθειας με χρήση της Θεωρίας των Καταστροφών έγκειται στην *κατάταξη* της συνάρτησης του Συνολικού Δυναμικού του εκάστοτε εξεταζόμενου συστήματος σύμφωνα με την εν λόγω Θεωρία.

## (β) Ορισμοί και μαθηματικές έννοιες

### 1. Δομική Ευστάθεια Συναρτήσεων (structural stability)

Η έννοια της δομικής ευστάθειας συνδέεται άμεσα με την παρουσία και εν γένει απόκριση ενός συστήματος ή φαινομένου στον πραγματικό φυσικό κόσμο. Ο χαρακτηρισμός αυτός δεν έχει καμιά σχέση με την ευστάθεια, όπως αυτή ορίζεται με βάση τη Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας ή τη Θεωρία των Διακλαδώσεων (π.χ. ευστάθεια σημείων ισορροπίας), αλλά αφορά την ποιοτική συμπεριφορά μιας συνάρτησης ΤΟΠΙΚΑ, λόγω μιας ΑΥΘΑΙΡΕΤΗΣ ΜΙΚΡΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ (arbitrary small perturbation).

Μια συνάρτηση καλείται **δομικά ευσταθής**, όταν οι ποιοτικές της ιδιότητες **δεν** μεταβάλλονται **τοπικά**, αν πραγματοποιηθεί σε αυτή μια αυθαίρετη μικρή διαταραχή. Έστω  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  συνάρτηση συνολικού δυναμικού και  $\varepsilon f(q_1, q_2, \dots, q_n)$  μια μικρή διαταραχή. Η  $V$  είναι **δομικά ευσταθής** στο σημείο  $q_0 \in \mathbb{R}$ , αν υπάρχει ένας ομαλός μετασχηματισμός μεταβλητών (συντεταγμένων) της μορφής  $q'_j = q'_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  τέτοιος ώστε και η **νέα συνάρτηση**  $V' = V + \varepsilon f$ , που προκύπτει από την παραπάνω διαταραχή (στο νέο σύστημα συντεταγμένων) να έχει **την ίδια δομή** με αυτή της  $V$  (στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων), που συμβολικά γράφεται ως:  $V'(q') = V(q)$ .

## 2. Προσδιοριστικότητα $K(V)$ (determinacy)

Η έννοια αυτή βασικά απαντά στο ερώτημα μέχρι ποιας τάξης όροι στο ανάπτυγμα Taylor (περί ένα σημείο ισοροπίας) της συνάρτησης συνολικού δυναμικού  $V$  πρέπει να διατηρηθούν, προκειμένου να υπάρξει **πλήρης** περιγραφή της **τοπικής** συμπεριφοράς **ευστάθειας** ενός συστήματος. Δηλαδή, ποιος είναι ο **δεσπόζων** όρος του αναπτύγματος και πέραν αυτού η σειρά Taylor μπορεί να **κολοβωθεί** (truncated), έτσι ώστε υψηλότερης τάξης όροι να μην επηρεάζουν ποιοτικά την τοπική συμπεριφορά του συστήματος.

## 3. Ανάπτυξη (Ανάπτυγμα: unfolding)

**Ανάπτυξη** (ή ανάπτυγμα)  $V^*(q_j; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  μιας συνάρτησης **σπέρματος** (germ)  $V(q_j)$  ορίζεται ως το σύνολο της πλέον γενικής οικογένειας συναρτήσεων γειτονικών της  $V$ , οι οποίες διαθέτουν **τοπικά** τις ίδιες ιδιότητες με αυτή (ακρότατα, σημεία καμπής κλπ.) με τη **μικρότερη δυνατή διάσταση**  $r$ .

### 3.1. Πλήρης ανάπτυξη (versal unfolding)

Μια ανάπτυξη  $F(q_j; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  διάστασης  $r$ , μιας συνάρτησης σπέρματος  $V(q_j)$  είναι **πλήρης**, αν οποιαδήποτε άλλη ανάπτυξη  $V'(q'_j; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r)$  της  $V$  μπορεί να προκύψει από την  $F$  μέσω ομαλής (smooth) αλλαγής των μεταβλητών και των παραμέτρων της.

### 3.2. Γενική ανάπτυξη (universal unfolding)

Μια ανάπτυξη είναι **γενική**, αν είναι **πλήρης** και διαθέτει τον μικρότερο αριθμό παραμέτρων  $r$ . Ο αριθμός αυτός καλείται **συνδιάσταση** (codimension).

Συμπερασματικά, η μελέτη της **ποιοτικής συμπεριφοράς** μιας συνάρτησης Συνολικού Δυναμικού  $V(\mathbf{q}; \mathbf{c})$  στη γειτονιά ενός ορισμένου σημείου  $q_0$  (π.χ. ενός σημείου ισορροπίας) συνδέεται με το πρόβλημα υπολογισμού της **προσδιοριστικότητας** και της **γενικής ανάπτυξης**.

## 4. Πρόβλημα αναπτύγματος (unfolding)

Το πρόβλημα προσδιορισμού της πλέον γενικής οικογένειας συναρτήσεων γειτονικών της αρχικής συνάρτησης, με την μικρότερη δυνατή διάσταση, η οποία περιλαμβάνει την αρχική συνάρτηση καλείται πρόβλημα «αναπτύγματος» (unfolding). Η διάσταση αναφέρεται στον αριθμό των παραμέτρων ελέγχου.

## 5. Υπολογισμός προσδιοριστικότητας

Ορίζοντας ως τον **δεσπόζοντα** όρο  $k$  τάξης της συνάρτησης  $V$  στο σημείο  $q_0$  ως  $k-jet$ , με συμβολισμό  $j^k V(q_0)$  ή  $j^k V$ , παρατίθεται κατωτέρω ένας αλγόριθμος, ο οποίος μέσω τεσσάρων απλών βημάτων επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της προσδιοριστικότητας μιας συνάρτησης  $V(q)$ , δηλ. του αριθμού των απαραίτητων όρων του αναπτύγματος Taylor αυτής. Τα βήματα αυτά έχουν συνοπτικά ως εξής:



(α) Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι η  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  έχει προσδιοριστικότητα  $k$ .

(β) Έστω  $m_j(q)$  το σύνολο των μονώνυμων ως προς  $q_1, q_2, \dots, q_n$  με βαθμό  $2, 3, \dots$ :

$$m_j(q) = q_1^2, q_1q_2, \dots, q_n^2; q_1^3, q_1^2q_2, \dots$$

δηλαδή  $m_1 = q_1^2, m_2 = q_1q_2$  κ.ο.κ.

(γ) Υπολογίζουμε το σύνολο των πολωνύμων  $Q_{ij}(q)$ :

$$Q_{ij}(q) = j^{k+1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} m_j(q) \right)$$

(δ) Μπορούν όλα τα μονώνυμα βαθμού  $k+1$  να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός των  $Q_{ij}$  με σταθερούς συντελεστές; Αν ναι, τότε η υπόθεση (α) είναι **ορθή**, αλλιώς ακολουθούμε τα ίδια βήματα για υποτιθέμενη προσδιοριστικότητα  $k+1$  κλπ.

#### 6. Σχέση προσδιοριστικότητας – συνδιάστασης

Ισχύει ότι  $K(V) \leq \text{co dim}(V) + 2$

#### 7. Υπολογισμός της γενικής ανάπτυξης

Οι κανόνες που διέπουν τον υπολογισμό της γενικής ανάπτυξης μιας συνάρτησης  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x}$  μητρώο-διάνυσμα των μεταβλητών  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) αποτελούν συμπλήρωμα των αντίστοιχων κανόνων υπολογισμού της προσδιοριστικότητας, που προαναφέρθηκαν. Ο σχετικός αλγόριθμος συντίθεται από τα επόμενα απλά βήματα:

(α) Υπολογίζεται η προσδιοριστικότητα  $k$  της  $f(x)$ . Αρκεί δε να εργασθεί κανείς με το πολυώνυμο  $\tilde{f}(x) = j^k f(x)$ .

(β) Έστω  $h_j(\mathbf{x})$  η αλληλουχία των μονώνυμων ως προς  $x_1, x_2, \dots, x_n$  βαθμού  $0, 1, 2, \dots$  της μορφής  $h_j(\mathbf{x}): 0, x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^2, x_1x_2, \dots$

(γ) Υποτίθεται ότι η  $F(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  είναι ανάπτυξη  $r$  - διάστασης της  $\bar{f}(x)$ . Ορίζονται τότε τα  $T_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} j^{k+l} F(\mathbf{x}; \mathbf{a})|_{\alpha=0}$ .

(δ) Καταγράφονται όλα τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τη σχέση:

$$S_{ij} = j^k \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} h_j(\mathbf{x}) \right\}$$

(ε) Μπορούν όλα τα μονώνυμα βαθμού  $\leq k$  να εκφραστούν με τη μορφή  $\sum s_{ij} S_{ij}(\mathbf{x}) + \sum t_j T_j(\mathbf{x})$ , όπου  $s_{ij}, t_j$  πραγματικοί αριθμοί; Αν ναι, τότε η  $F(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  είναι μια **πλήρης ανάπτυξη** της  $\bar{f}(x)$ .

(στ) Είναι το σύνολο των  $T_j(\mathbf{x})$  ελάχιστο, δηλαδή είναι τα πολυώνυμα αυτά γραμμικά ανεξάρτητα; Αν ναι, τότε η  $F(\mathbf{x}; \mathbf{a})$  είναι μια **γενική ανάπτυξη** της  $\bar{f}(x)$ .

Στο σημείο αυτό δέον όπως τονιστεί ότι **η γενική ανάπτυξη μιας συνάρτησης  $\bar{f}(x)$  ΔΕΝ είναι αναγκαστικά ΜΟΝΑΔΙΚΗ.**

#### 8. Υπολογισμός του σπέρματος

Το γεγονός ότι οι αλγόριθμοι υπολογισμού τόσο της προσδιοριστικότητας όσο και του σπέρματος αλληλοσυμπληρώνονται, οδηγεί χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία σε έναν ενδιάμεσο αυτών αλγόριθμο, βάσει του οποίου υπολογίζεται το **απλούστερο δυνατό σπέρμα**, το σχετιζόμενο με μια συνάρτηση  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  προσδιοριστικότητας  $k$ , που αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

(α) Υπολογίζεται αρχικά η προσδιοριστικότητα  $k$  της  $f(x)$ , αρκεί δε να εργασθεί κανείς με το πολυώνυμο  $\bar{f}(x) = j^k f(x)$ , όπως ανωτέρω.

(β) Έστω  $V_k$  ο γραμμικός διανυσματικός χώρος που ορίζεται από όλα τα μονώνυμα ως προς  $x_1, x_2, \dots, x_n$  βαθμού  $\leq k$ . Τότε η διάσταση του  $V_k$  ισούται με  $\dim V_k = \frac{(k+n)!}{k!n!}$ .

(γ) Έστω  $V_D$  ο γραμμικός διανυσματικός υποχώρος του  $V_k$ , που ορίζεται από όλα τα πολυώνυμα  $R_{ij}$ , όπως αυτά προκύπτουν από τον αλγόριθμο υπολογισμού της προσδιοριστικότητας.

(δ) Έστω  $V_U$  ο γραμμικός διανυσματικός υποχώρος του  $V_k$ , που ορίζεται από το ελάχιστο σύνολο των πολυωνύμων  $T_{ij}$ , όπως αυτά προκύπτουν μέσω του αλγόριθμου υπολογισμού της ανάπτυξης.

(ε) Κατά συνέπεια θα ισχύει ότι ο ακόλουθος γραμμικός διανυσματικός χώρος

$$V_k - (V_D \oplus V_U) = \frac{V_k}{(V_D \oplus V_U)}$$

*ορίζεται από τις πρώτες μερικές παραγώγους του σπέρματος της  $f$ .*

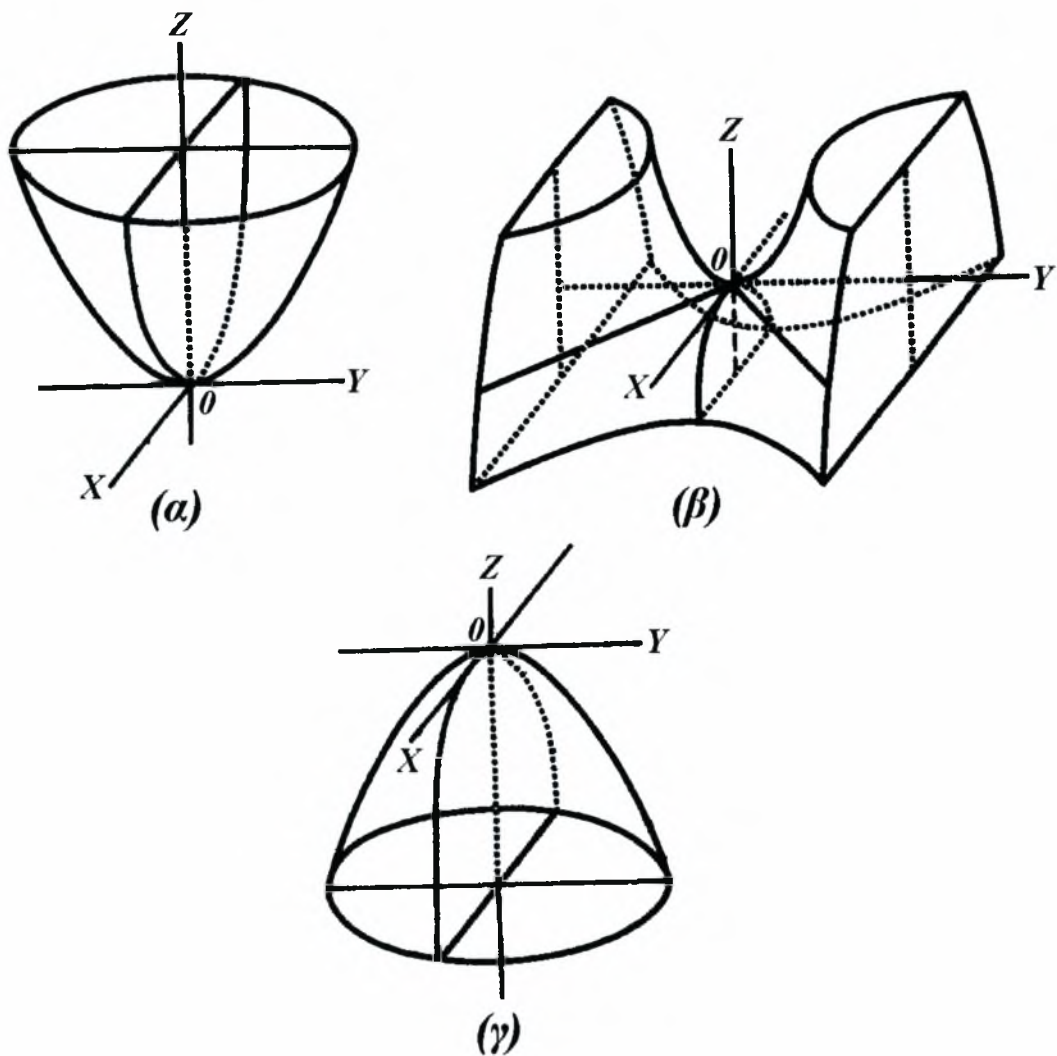
Για παραδείγματα εφαρμογής των τριών αυτών αλγορίθμων μπορεί ο αναγνώστης να αποταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία.

#### 9. Κρίσιμα σημεία – Συσχετισμός με τη Θεωρία Διακλαδώσεων

(α) Αν  $V$  το συνολικό δυναμικό ενός συστήματος, σύμφωνα με τη Θεωρία των Καταστροφών ένα σημείο στο οποίο μηδενίζονται όλες οι πρώτες παράγωγοι αυτής (ως προς τις ενεργές συντεταγμένες – βαθμούς ελευθερίας του συστήματος) αλλά όχι και η ορίζουσα του μητρώου Hessian (ο μηδενισμός του οποίου υποδηλώνει κρίσιμα σημεία ισορροπίας σύμφωνα με τη Θεωρία Διακλαδώσεων), τότε το σημείο αυτό καλείται **κρίσιμο σημείο Morse ή μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο** (non-degenerate critical point).

(β) Ένα κρίσιμο σημείο ισορροπίας (όπου  $\delta^2 V = 0$ , άρα και η Hessian=0) ΔΕΝ είναι κρίσιμο σημείο Morse και καλείται **εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο** (degenerate critical point).

(γ) Συνεπώς, συσχετίζοντας τα μη κρίσιμα σημεία ισορροπίας της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας με τα σημεία Morse, παρατηρούμε ότι στα τελευταία μπορούν να αντιστοιχούν είτε ευσταθή είτε ασταθή σημεία ισορροπίας. Ένα τέτοιο σημείο Morse καλείται **σημείο σέλας Morse** (Morse saddle point), τυπική απεικόνιση των τριών τέτοιων σημείων στο  $\mathbb{R}^2$  φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Άρα τα μη εκφυλισμένα σημεία μπορεί να είναι είτε ευσταθή είτε ασταθή σημεία ισορροπίας, αποδεικνύεται δε ότι στη γειτονιά ενός μη εκφυλισμένου σημείου (Morse) οποιαδήποτε συνάρτηση είναι δομικά ευσταθής. Στον Πίνακα Π1.1 παρατίθεται η συσχέτιση μεταξύ των κρίσιμων και μη σημείων της Θεωρίας των Καταστροφών και της Θεωρίας των Διακλαδώσεων-Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας.



Σχήμα 1.1. Τα τρία σημεία σέλας Morse στο  $\mathbb{R}^2$ , εκ των οποίων το (α) έχει τοπικό ελάχιστο, το (β) μορφή σέλας και το (γ) τοπικό μέγιστο.

Ιδιότητα	Θεωρία Καταστροφών	Θεωρία Διακλαδώσεων
$\nabla V \neq 0$	Μη κρίσιμο σημείο	Σημείο μη ισορροπίας
$\nabla V = 0, \det V_{ij} \neq 0$	Κρίσιμο σημείο (Morse)	Σημείο ισορροπίας
$\nabla V = 0, \det V_{ij} = 0$	Μη κρίσιμο σημείο Morse, εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο	Κρίσιμο σημείο

Πίνακας Π1.1. Συσχετισμός κρίσιμων σημείων της Θεωρίας των Καταστροφών και της Θεωρίας των Διακλαδώσεων (κατ’ ουσία της Μη Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικής Ευστάθειας).

A.2.2. Κατάταξη των Καταστροφών

(a) Γενικά

Όνομα	$k^*$	Σπέρμα	Διαταραχή
$A_2$	1	$x^3$	$a_1x$
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
$A_4$	3	$x^5$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
$A_6$	5	$x^7$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
$D_{-4}$	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_{+4}$	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
$D_5$	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
$D_{-6}$	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$D_{+6}$	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

\* αριθμός παραμέτρων ελέγχου

Ο Thom κατέταξε όλες εκείνες τις στοιχειώδεις καταστροφές για συστήματα μέχρι πέντε παραμέτρων ελέγχου, η ονοματολογία των οποίων, η μορφή του σπέρματος και της αντίστοιχης διαταραχής παρουσιάζονται στον διπλανό Πίνακα. Πάντως, για συντηρητικά συστήματα μέχρι τεσσάρων παραμέτρων

ελέγχου και το πολύ δύο ενεργών συντεταγμένων, υπάρχουν μόνον επτά δυνατές συναρτήσεις δυναμικού για κάθε τύπο ανωμαλίας (καταστροφής) με τον μικρότερο δυνατό αριθμό παραμέτρων ελέγχου, έτσι ώστε κάθε συνάρτηση δυναμικού να είναι μια γενική ανάπτυξη (δομικά ευσταθής).

Ο Πίνακας Π1.2. συνδέει τις εν λόγω τυπικές καταστροφές με τα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία ή επιφάνειες κρίσιμων σημείων της Θεωρίας των Διακλαδώσεων.

Αριθμός ενεργών συντεταγμένων	Τύπος καταστροφής	Συνάρτηση Δυναμικού	Κρίσιμο σημείο ή επιφάνεια κρίσιμων σημείων
m=1	Πτύχωσης (διπλώματος), fold	$x^3 + ux$	Οριακό σημείο, ασύμμετρο ΣΔ
	Αιχμής, cusp	$x^4 + ux^2 + vx$	Συμμετρικό ΣΔ (ασταθές-ευσταθές σημείο αποκοπής <sup>1)</sup> )
	Χελιδονοουράς, swallowtail	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	
	Πεταλούδας,	$x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$	



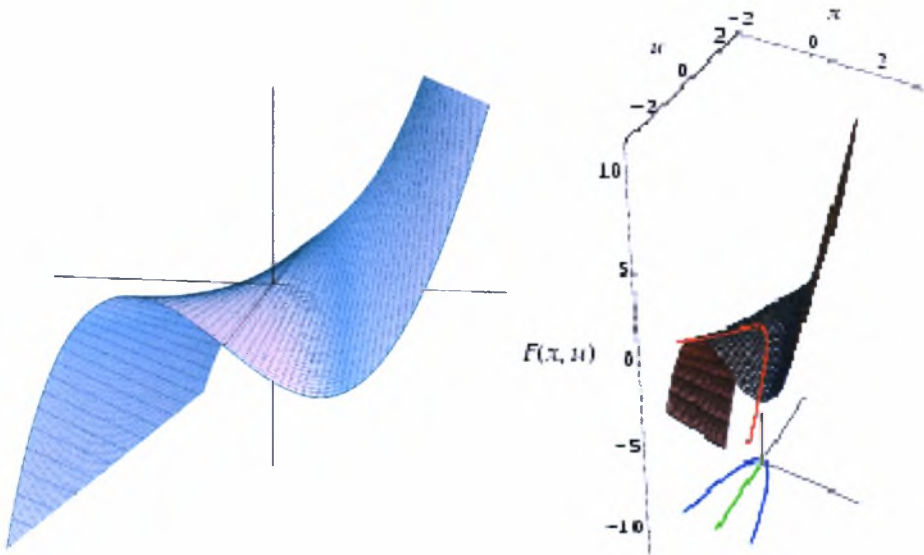
	butterfly		
m=2	Υπερβολικός λώρος, hyperbolic umbilic	$x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$	Μονοκλινές <sup>2</sup> ΣΔ, Ομοκλινές <sup>3</sup> ΣΔ, Διακλάδωση από οριακό σημείο
	Ελλειπτικός λώρος, elliptic umbilic	$x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$	Αντικλινές <sup>4</sup> ΣΔ
	Παραβολικός λώρος, parabolic umbilic	$x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$	Παρακλινές <sup>5</sup> ΣΔ
ΣΔ = σημείο διακλάδωσης <sup>1</sup> = cut - off point, <sup>2</sup> = monoclinical, <sup>3</sup> = homeoclinical, <sup>4</sup> = anticlinal, <sup>5</sup> = paraclinal			

Πίνακας Π1.2. Οι επτά στοιχειώδεις καταστροφές

(β) Στοιχειώδεις Καταστροφές μιας ενεργής συντεταγμένης

1. Καταστροφή τύπου πτύχωσης (fold)

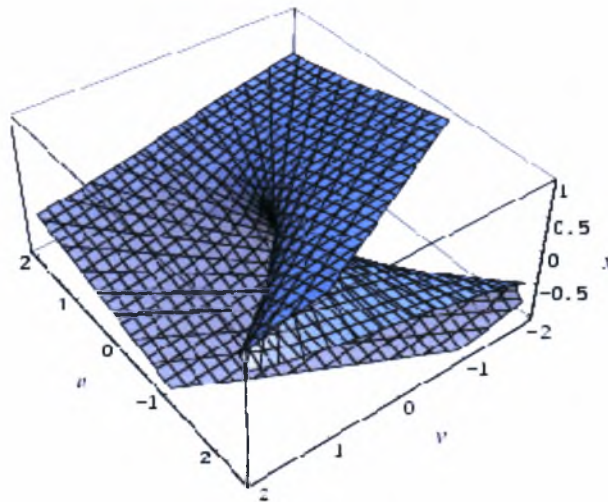
Η συνάρτηση δυναμικού αυτού του (απλούστερου όλων) τύπου καταστροφής είναι η γενική ανάπτυξη του σπέρματος  $f(x) = x^3$ . Φωτορεαλιστική απεικόνιση της σχετικής επιφάνειας ισορροπίας παρατίθεται Σχήμα 1.2 που ακολουθεί. Ο συγκεκριμένος τύπος ανωμαλίας δεν πρόκειται να μας απασχολήσει στη συνέχεια, ενώ περαιτέρω εκτεταμένες επ’ αυτού πληροφορίες υπάρχουν στη σχετική βιβλιογραφία.



Σχήμα 1.2. Επιφάνεια της ανωμαλίας (καταστροφής) τύπου πτύχωσης.

## 2. Καταστροφή τύπου αιχμής (cusp)

Η συνάρτηση δυναμικού της καταστροφής τύπου αιχμής που θα μας απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό στη συνέχεια, αποτελεί γενική ανάπτυξη του σπέρματος  $f(x)=x^4$ , και καθόσον πρόκειται για συνάρτηση τριών μεταβλητών, η απεικόνιση της σχετίζεται με σταθερές τιμές της πρώτης παραγώγου της ως προς τη μοναδική ενεργή συντεταγμένη, δηλαδή με συνάρτηση της μορφής  $g(x,u)=3x^3+2ux+v=ct$ , τυπικές μορφές της οποίας φαίνονται στο Σχήμα 1.3.

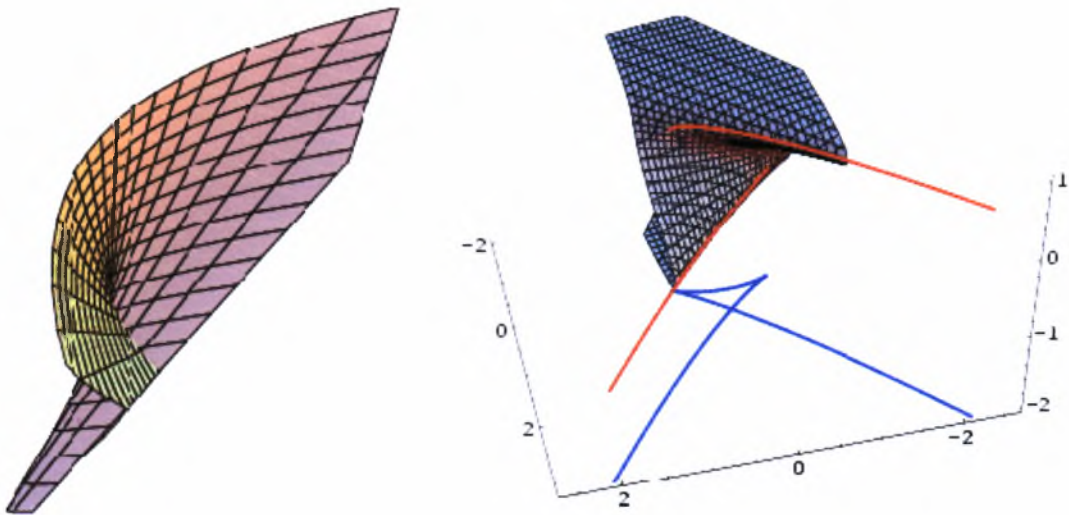


Σχήμα 1.3. Επιφάνεια κρίσιμων σημείων της καταστροφής τύπου αιχμής από Mathematica

## 3. Καταστροφή τύπου χελιδονοουράς (swallowtail)

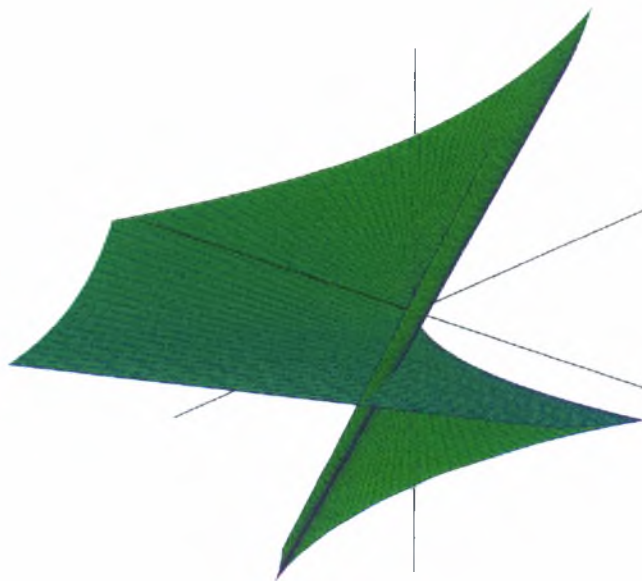
Η καταστροφή τύπου χελιδονοουράς αποτελεί το γενικό ανάπτυγμα της ανωμαλίας  $f(x) = x^5$ , με συνδιάσταση 3, και απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 1.4.



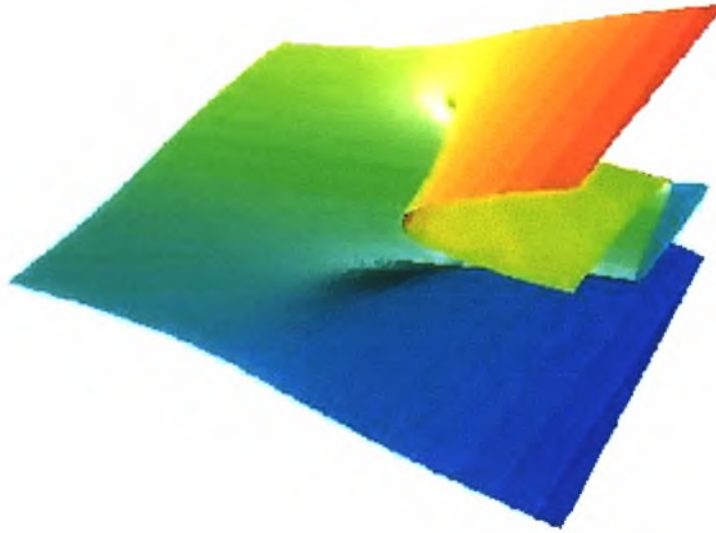


Σχήμα 1.4. Τυπική τομή της υπερεπιφάνειας κρίσιμων σημείων της ανωμαλίας τύπου χελιδονοσουράς

Η συνάρτηση  $x = uv^2 + 3v^4$ ,  $y = -2uv - 4v^3$ ,  $z = u$  παρουσιάζει τέτοιο τύπο καταστροφής, ο οποίος φαίνεται στα τρισδιάστατα γραφήματα των Σχημάτων 1.5 και 1.6 που έπονται.



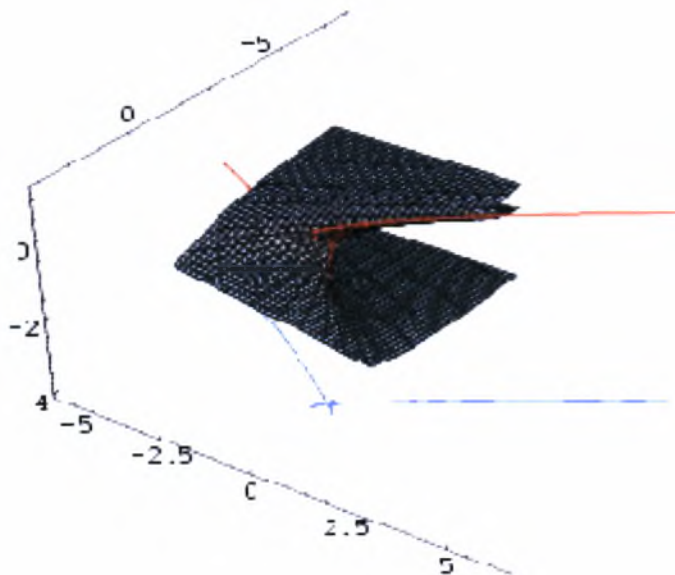
Σχήμα 1.5. Ανωμαλία τύπου χελιδονοσουράς



Σχήμα 1.6. Τυπική τομή της υπερεπιφάνειας της εν λόγω ανωμαλίας

#### 4. Καταστροφή τύπου πεταλούδας (butterfly)

Πρόκειται για γενική ανάπτυξη του σπέρματος  $f(x) = x^6$ , συνδιάστασης 4, με τυπική τομή της σχετικής υπερεπιφάνειας κρίσιμων σημείων να απεικονίζεται παρακάτω (Σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7. Επιφάνεια ισορροπίας καταστροφής τύπου πεταλούδας

(γ) Πέραν των επτά στοιχειωδών καταστροφών

Ο διακεκριμένος ερευνητής Arnold προσέφερε συστηματική κατάταξη και ιδιαίτερη ονοματολογία σε καταστροφές πέραν των επτά στοιχειωδών, εκτενής αναφορά επί των οποίων βρίσκεται και στο σύγγραμμα του R. Gilmore, από το οποίο για εποπτικούς και μόνο λόγους παραθέτουμε τον επόμενο Πίνακα, που αναφέρεται σε μερικές τέτοιες καταστροφές.

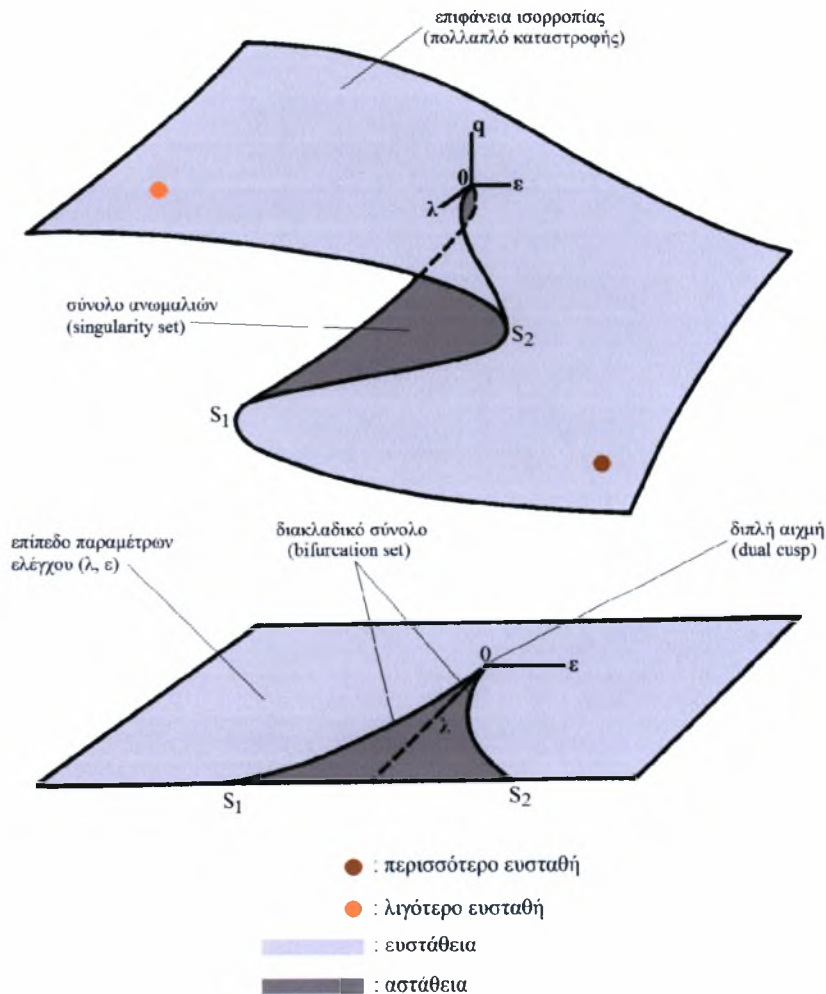
	$m = 1$	$m = 2, n = a_0 + a_1 y$
$l = 2$	$Z_{11}$	$x^3 y + y^5 + axy^4$
	$Z_{12}$	$x^3 y + xy^4 + ax^2 y^3$
	$Z_{13}$	$x^3 y + y^6 + axy^5$
	$W_{12}$	$x^4 + y^5 + ax^2 y^3$
	$W_{13}$	$x^4 + xy^4 + ay^6$
	$E_{12}$	$x^3 + y^7 + axy^5$
	$E_{13}$	$x^3 + xy^5 + ay^8$
	$E_{14}$	$x^3 + y^8 + axy^6$
$l = 3$	$Q_{10}$	$x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$
	$Q_{11}$	$x^3 + y^3 z + xz^3 + az^5$
	$Q_{12}$	$x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$
	$S_{11}$	$x^4 + y^2 z + xz^3 + ax^3 z$
	$S_{12}$	$x^2 y + y^2 z + xz^3 + az^5$
	$U_{12}$	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$
	$Q_{16}$	$x^3 + yz^2 + y^7 + axy^5$
	$Q_{17}$	$x^3 + yz^2 + xy^5 + ay^8$
	$Q_{18}$	$x^3 + yz^2 + y^8 + axy^6$
	$S_{16}$	$x^2 z + yz^2 + xy^4 + ay^6$
	$S_{17}$	$x^2 z + yz^2 + y^6 + azy^4$
	$U_{16}$	$x^3 + xz^2 + y^5 + ax^2 y^2$

(δ) Η καταστροφή τύπου αιχμής: εμφάνιση

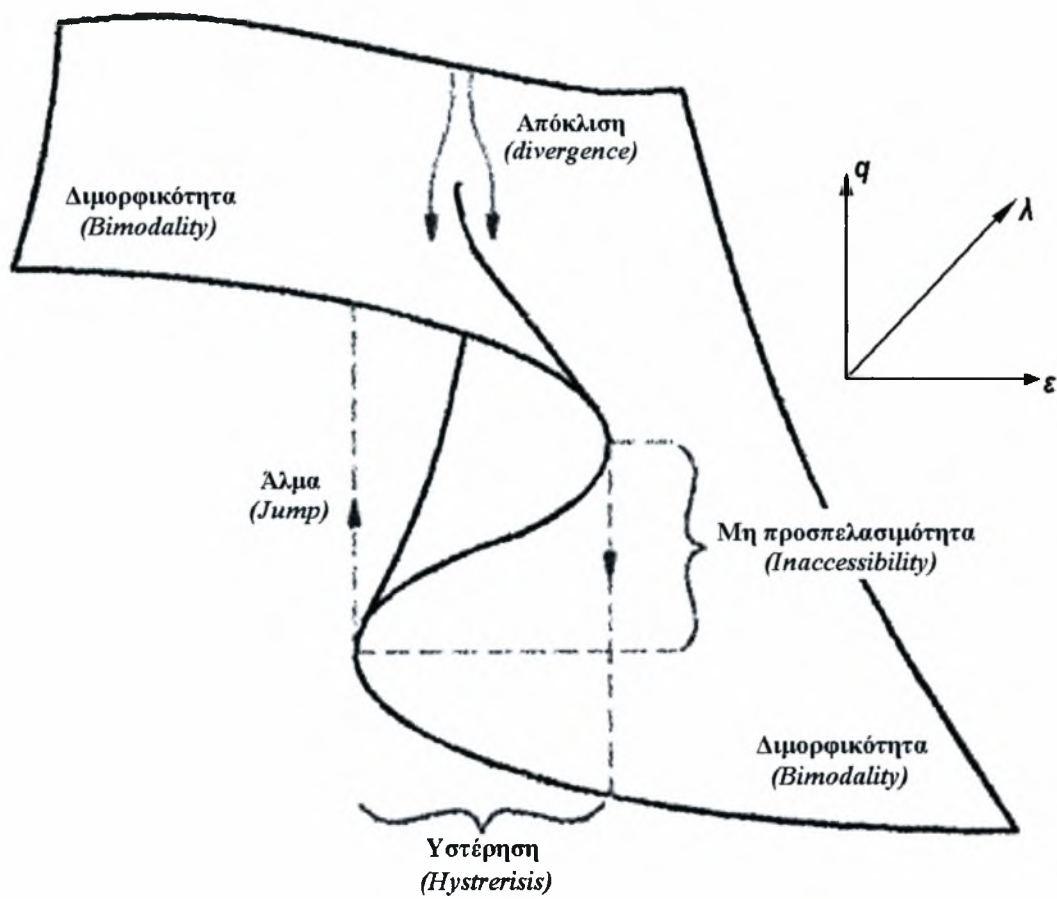
Η καταστροφή τύπου αιχμής (cusp singularity), αποτελεί την κατά τεκμήριο πλέον απαντώμενη στα δομικά συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας, και συνδέεται με συμμετρικά ως επί το πλείστον διακλαδικά σημεία. Η συγκεκριμένη μορφή ανωμαλίας δύναται επιπρόσθετα να συνδεθεί με καταστροφές δύο ενεργών συντεταγμένων υψηλότερης τάξης (higher order two-mode singularities), οι οποίες συνδέονται με τη δομική ευστάθεια συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν διπλή συμμετρία.

Αν εξαιρεθεί η εν λόγω καταστροφή λαμβάνει χώραν μέσω *σημείου αποκοπής* (cut-off point), η οποία οδηγεί στη λεγόμενη *λοξή αιχμή* (tilted cusp: μη εκφυλισμένο σημείο υστέρησης χωρίς συμμετρική μοναδικότητα, κυβικοί όροι, ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης του τέλειου συστήματος), η καταστροφή τύπου αιχμής σχετίζεται με μια ενεργό συντεταγμένη και δύο παραμέτρους ελέγχου (codim=2). Στα προβλήματα

ελαστικής ευστάθειας οι παράμετροι αυτοί είναι το φορτίο  $\lambda$  και η αρχική ατέλεια  $\varepsilon$ , οπότε η δομικά ευσταθής γενική ανάπτυξη συνδέεται με την απλούστερη μορφή δυναμικού:  $V = q^4 + \lambda q^2 + \varepsilon q$ . Στον τρισδιάστατο χώρο η συνάρτηση  $M = dV/dq = 4q^3 + 2\lambda q + \varepsilon$  παριστά την επιφάνεια ισορροπίας, που έχει τη μορφή διπλής πτύχωσης και η γεωμετρία της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα 1.8, ενώ οι πέντε προεξάρχουσες ιδιότητες της αιχμής, σύμφωνα με τον διάσημο μαθηματικό Zeeman, οι οποίες αναλύονται στη συνέχεια, φαίνονται στο Σχήμα 1.9. Η μορφή δε της καμπύλης του συνολικού δυναμικού  $V(q, \lambda)$  σε διάφορα χαρακτηριστικά σημεία του λεγόμενου πολλαπλού καταστροφής  $M$ , παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 1.10.

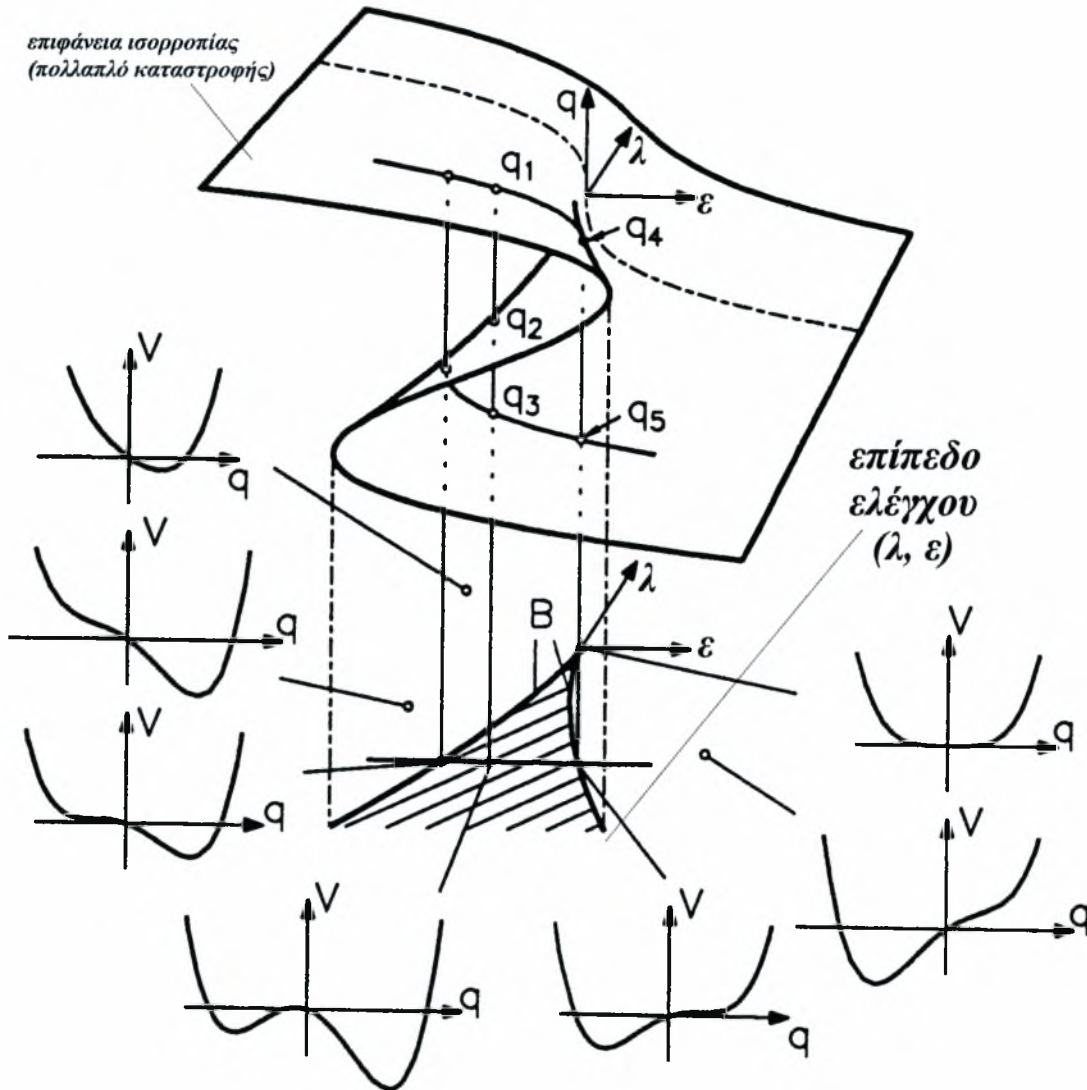


Σχήμα 1.8. Γεωμετρία της επιφάνειας ισορροπίας της καταστροφής τύπου αιχμής.



Σχήμα 1.9. Οι πέντε προεξάρχουσες ιδιότητες της διπλής αιχμής κατά Zeeman.





Σχήμα 1.10. Καμπύλες συνολικού δυναμικού για διάφορα χαρακτηριστικά σημεία του πολλαπλού καταστροφής τύπου διπλής αιχμής.

Οι πέντε ιδιότητες της διπλής αιχμής είναι οι ακόλουθες:

- **(Δι)μορφικότητα (bi-modality):** Με τον όρο αυτό εννοείται ότι το υπό εξέταση σύστημα διαθέτει περισσότερα του ενός τοπικά ελάχιστα (δηλαδή ευσταθή σημεία ισορροπίας) για κάποιες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, δηλαδή για σημεία εντός του καμπύλου τριγώνου  $S_1AS_2$  του Σχήματος 1.8.
- **Μη προσπελασιμότητα (inaccessibility):** Η έννοια αυτή συνδέεται με το γεγονός ότι το σύστημα διαθέτει μια ασταθή κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή το μεσαίο φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας, που σχετίζεται με τοπικά μέγιστα, είναι μη προσπελάσιμο.

- **Αιφνίδια άλματα (sudden jumps):** Όποτε η συνάρτηση του συνολικού δυναμικού  $V$  διαθέτει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας, λαμβάνουν χώραν αιφνίδια (καταστροφικά) άλματα, σε περίπτωση που μικρές αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων ελέγχου οδηγούν σε μεγάλες αλλαγές στην τιμή της λεγόμενης μεταβλητής κατάστασης (state variable), δηλαδή της ενεργού συντεταγμένης. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει όταν ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο της  $V$  συγχωνεύονται (coalesce) και κατόπιν αλληλοεκμηδενίζονται (annihilate) και εξαφανίζονται, δηλαδή όταν το σύστημα πραγματοποιεί άλμα από το ένα στο άλλο φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας συμβαίνει ένα αιφνίδιο άλμα και στην τιμή της ενεργού συντεταγμένης.
- **Απόκλιση (divergence):** Το συγκεκριμένο φαινόμενο συμβαίνει όταν μικρές διαφοροποιήσεις του δρόμου ισορροπίας μπορούν χωρίς αιφνίδια άλματα να παράγουν μεγάλες διαφοροποιήσεις στη τιμή της μεταβλητής κατάστασης, ακόμα και όταν δύο τροχιές ξεκινούν και τελειώνουν στα ίδια σημεία ελέγχου. Παραδείγματος χάριν δύο γειτονικές τροχιές (μία στα αριστερά και μία στα δεξιά του άξονα  $\lambda$ ) που ξεκινούν από ένα σημείο εκτός του καμπύλου τριγώνου και τελειώνουν σε ένα σημείο μέσα σε αυτό μπορούν να παράγουν ιδιαιζόντως διαφορετική συμπεριφορά.
- **Υστέρηση (hysteresis):** Σχετίζεται με την περίπτωση κατά την οποία μια φυσική διεργασία δεν είναι αυστηρά αναστρέψιμη (αμφίδρομη). Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται όταν το άλμα από το ένα φύλλο της επιφάνειας ισορροπίας στο άλλο δεν συμβαίνει για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων ελέγχου, όπως αυτές του εναλλακτικού άλματος, οπότε η διαφοροποίηση της τιμής της μεταβλητής κατάστασης ακολουθεί τον χαρακτηριστικό βρόγχο υστέρησης.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β' : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ-ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ**

### **(α) Γενικοί ορισμοί και επισημάνσεις**

Η μη γραμμική θεωρία προσφέρει τη δυνατότητα ακριβούς υπολογισμού όλων των δυνατών σχηματισμών ισορροπίας (*equilibrium configurations*) ενός φορέα ή συστήματος για οποιαδήποτε τιμή της εξωτερικής φόρτισης, την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του καθ' όλο το "ιστορικό" φόρτισης, τον προσδιορισμό όλων των κρίσιμων σημείων ισορροπίας (όπου το σύστημα εμφανίζει απότομες ποιοτικές αλλαγές στην απόκριση του) αλλά και της ευστάθειας ή αστάθειας των ισορροπιών γενικότερα.

### **Δρόμοι ισορροπίας, κρίσιμα σημεία και ευστάθεια, σημεία διακλάδωσης οριακό σημείο, συνήθης και ακαριαίος λογισμός**

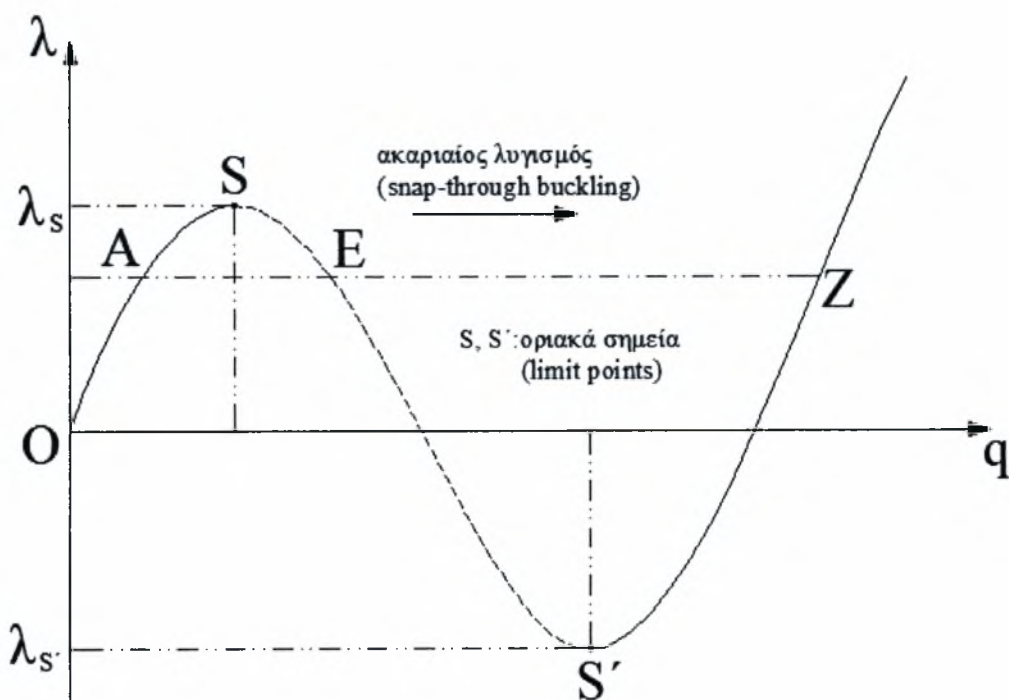
Η συμπεριφορά ενός ελαστικού συστήματος περιγράφεται συνήθως μέσω των λεγόμενων *δρόμων ισορροπίας* (*equilibrium paths*), που ουσιαστικά είναι οι καμπύλες (διαγράμματα) φόρτισης - μετατόπισης αυτού. Δίδοντας έμφαση στα *διακεκριμένα συντηρητικά συστήματα\**, θεωρούμε ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο χαρακτηρίζεται από  $n$  γενικευμένες συντεταγμένες  $q_i$ ,  $i=1,2,...,n$ , που αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας αυτού. Βέβαια, οι πραγματικές κατασκευές είναι συνεχή (απειροβάθμια) συστήματα, πλην όμως μέσω διακριτοποίησης - επιλογής των κατάλληλων μαθηματικών προσομοιωμάτων (προτύπων, μοντέλων), η μελέτη της ποσοτικής και ποιοτικής συμπεριφοράς συνεχών συστημάτων δύναται να αναχθεί στη μελέτη ενός μοντέλου με μικρό εν γένει αριθμό βαθμών ελευθερίας. Αν  $\lambda$  είναι η εξωτερική φόρτιση, τότε οι δρόμοι ισορροπίας, απεικονιζόμενοι σε επίπεδο, είναι καμπύλες της μορφής  $(q_i, \lambda) \forall i$ . Σε περίπτωση που ένας δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τα σχετικά σημεία ισορροπίας

---

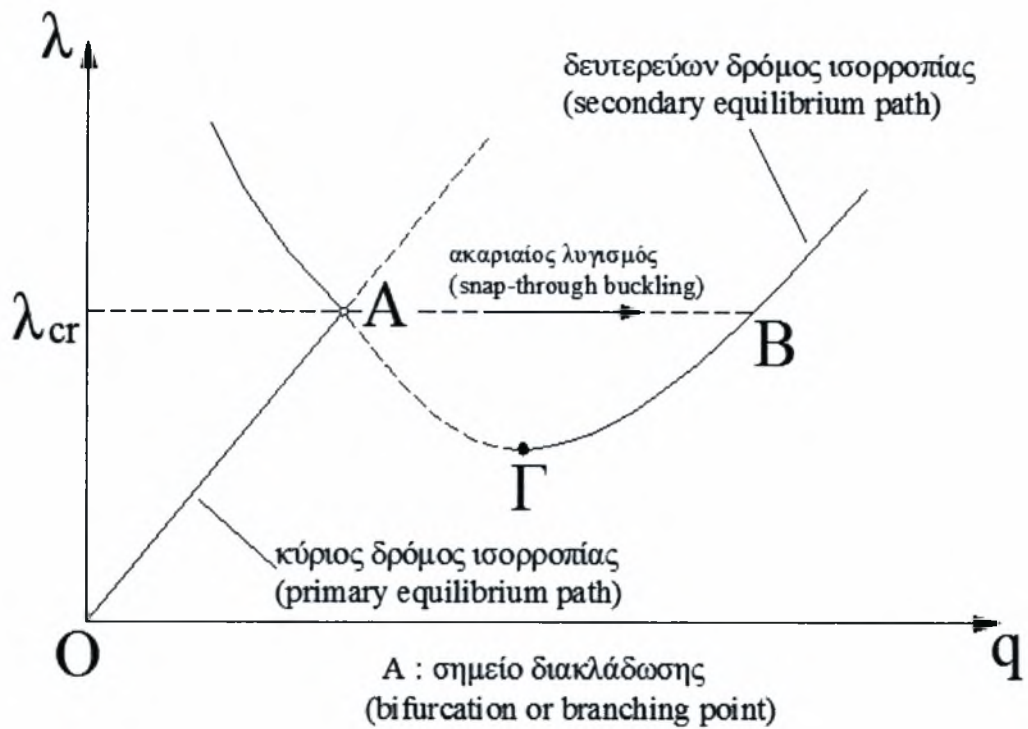
\* πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας, υπό φορτία προερχόμενα από δυναμικό πεδίο (potential forces), δηλαδή φορτιζόμενα από δυνάμεις των οποίων το έργο εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής τους



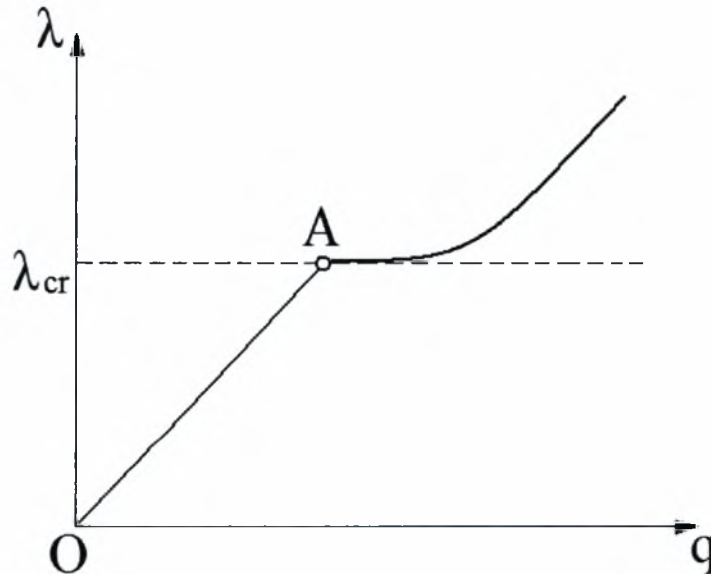
καλούνται **οριακά σημεία** (limit points), ενώ όταν οι δρόμοι *δεν* είναι συνεχείς, αλλά αποτελούνται από διάφορους μεταξύ τους τεμνόμενους κλάδους, τα σημεία τομής καλούνται **σημεία διακλάδωσης** (bifurcation points). Ενδεικτική γραφική αναπαράσταση των ανωτέρω δύο ειδών **κρίσιμων σημείων** απεικονίζεται στα Σχήματα 2.1 και 2.2, όπου κανείς διαπιστώνει πως για  $\lambda > \lambda_s$  (Σχ.2.1) ή για  $\lambda > \lambda_{cr}$  (Σχ.2.2), παραμορφωσιακή κατάσταση εμφανίζει αιφνίδια άλμα, με αποτέλεσμα αστοχία του φορέα λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Το φαινόμενο αυτό καλείται **ακαριαίος λυγισμός** (snap-through buckling) και δύναται να λάβει χώρα είτε μέσω οριακού σημείου είτε μέσω σημείου διακλάδωσης. Όμως, υπάρχει και ο τύπος του καλούμενου **συνήθους λυγισμού**, κατά τον οποίο ο φορέας παρουσιάζει **μεταλυσισμική αντοχή** (postbuckling strength), δηλαδή μπορεί να φέρει φορτίο μεγαλύτερο από το κρίσιμο χωρίς κίνδυνο αστοχίας. Τέτοιου είδους αντοχή εμφανίζεται σε μια κατασκευή **μόνο μέσω σημείου διακλάδωσης**, με χαρακτηριστικό δρόμο ισορροπίας του φαινομένου αυτού να φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.1. Δρόμος ισορροπίας συστήματος οριακού σημείου, που σχετίζεται με ακαριαίο λυγισμό.



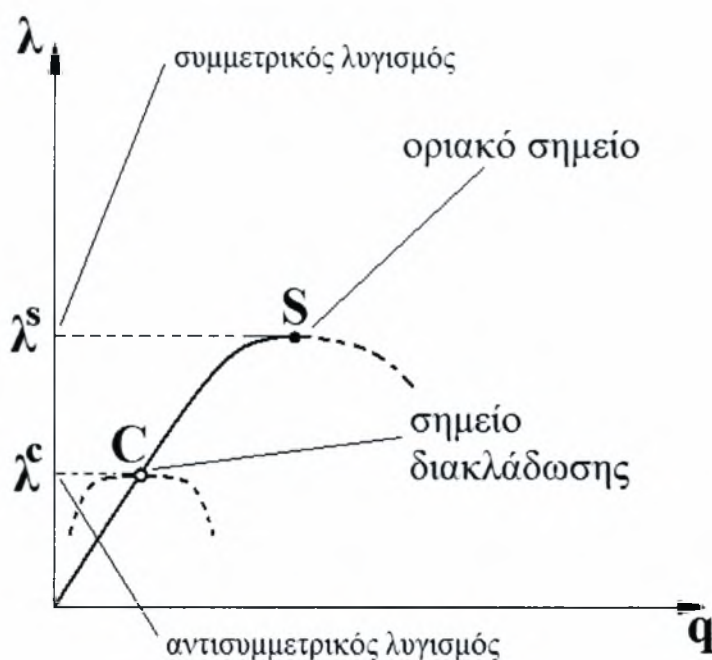
Σχήμα 2.2. Δρόμος ισορροπίας διακλαδικού συστήματος, που σχετίζεται με ακαριαίο λυγισμό.



Σχήμα 2.3. Δρόμος ισορροπίας συστήματος, το οποίο παρουσιάζει μεταλυστική αντοχή.

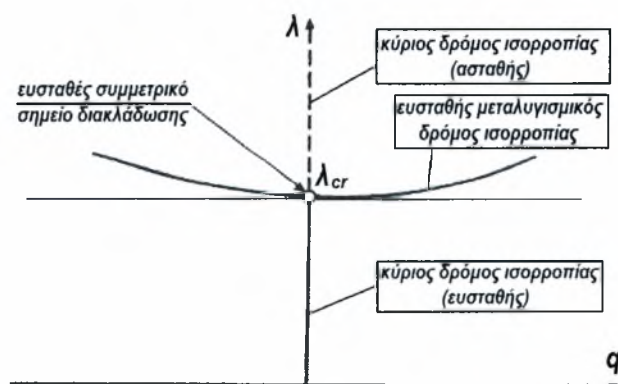
Πρέπει επίσης να μνημονευθεί και ο λεγόμενος **λυγισμός με μετάθεση** (sway buckling), είτε συνήθης είτε ακαριαίος, φαινόμενο το οποίο σχετίζεται με την ύπαρξη δυνατότητας τόσον συμμετρικής όσο και αντισυμμετρικής

παραμόρφωσης του φορέα, με χαρακτηριστική μορφή των σχετικών δρόμων ισορροπίας να απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.

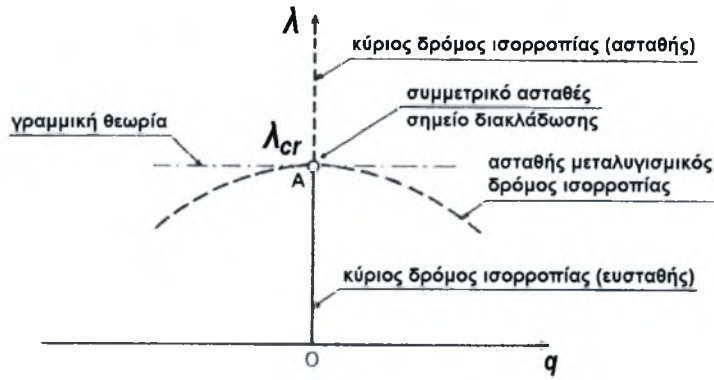


Σχήμα 2.4. Δρόμοι ισορροπίας συστήματος που σχετίζεται με λυγισμό λόγω μετάθεσης.

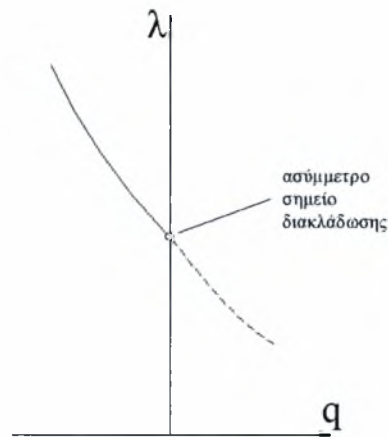
Όσον αφορά δε τους τύπους των απλών διακλαδικών σημείων, αυτοί διακρίνονται σε *συμμετρικά σημεία διακλάδωσης* (ευσταθή και ασταθή) και σε *ασύμμετρα σημεία διακλάδωσης* (πάντοτε ασταθή), που απεικονίζονται στα Σχήματα 2.5 – 2.8.



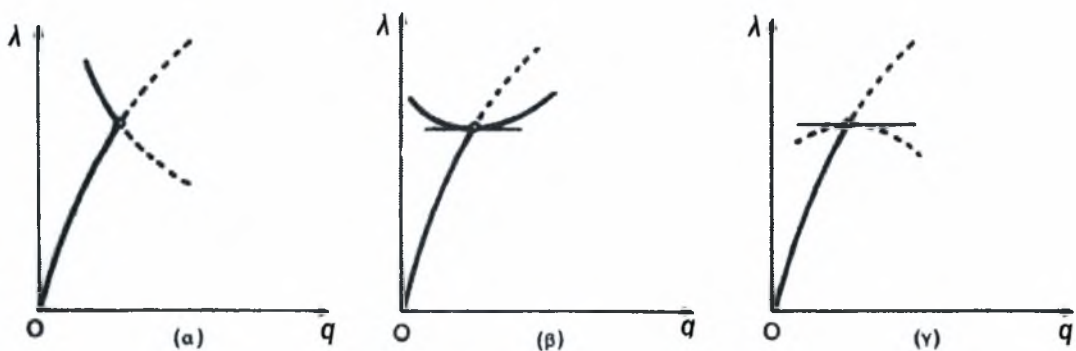
Σχήμα 2.5. Συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Σχήμα 2.6. Συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Σχήμα 2.7. Ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης επί τετριμμένου (χωρίς αρχική παραμόρφωση) κύριου δρόμου ισορροπίας.



Διάφοροι τύποι απλών σημείων διακλάδωσης: (α) ασύμμετρο, (β) συμμετρικό ευσταθές, (γ) συμμετρικό ασταθές

Σχήμα 2.8. Οι τρεις τύποι απλών διακλαδικών σημείων επί μονοτονικά αύξοντος κύριου δρόμου ισορροπίας.

Σημειωτέον ότι φαινόμενα διακλαδώσεων σε δευτερεύοντες κλάδους ισορροπίας είναι δυνατόν να συμβούν, παρουσιάζουν δε εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθόσον η κατασκευή σε τέτοιες περιπτώσεις αλλάζει συνεχώς την ποιοτική μεταλυγισμική συμπεριφορά της.

### Ευσταθής και ασταθής ισορροπία

Ορισμένα τμήματα των δρόμων ισορροπίας όλων των προηγούμενων Σχημάτων έχουν χαραχθεί με συνεχή γραμμή και άλλα με διακεκομμένη. Η συνεχής γραμμή συμβολίζει ευσταθή δρόμο και η διακεκομμένη ασταθή, ενώ εκτενής περιγραφή της μετάπτωσης από την ευστάθεια στην αστάθεια των ισορροπιών μέσω των κρίσιμων σημείων, αλλά και του ορισμού των εννοιών αυτών μπορεί να ευρεθεί σε πολλά συγγράμματα τόσο της Ελληνικής όσο και της διεθνούς σχετικής βιβλιογραφίας.

### (β) Η ενεργειακή μέθοδος

Για τον προσδιορισμό των κρίσιμων φορτίων των κατασκευών και της προ- αλλά και μεταλυγισμικής συμπεριφοράς αυτών χρησιμοποιούνται με επιτυχία διάφορες μέθοδοι, εντασσόμενες κυρίως στις ακόλουθες τρεις:

- Κλασσική μέθοδος ισορροπίας του Euler (μέθοδος γειτονικής ισορροπίας)
- Ενεργειακή μέθοδος
- Δυναμική ή Κινηματική μέθοδος

Η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται σε συντηρητικά συστήματα και βασίζεται στη μελέτη της συνάρτησης του **συνολικού δυναμικού**  $V_T$  αυτών. Όπως είναι γνωστό, το συνολικό δυναμικό (total potential)  $V_T$  οποιουδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των εσωτερικών δυνάμεων  $U$  (δηλαδή της ενέργειας παραμόρφωσης, strain energy) και του δυναμικού των εξωτερικών

δυνάμεων  $\Omega$  (που είναι το έργο των δυνάμεων αυτών από την τελική στην αρχική θέση ισορροπίας) :  $V_T = U + \Omega$ .

### (α) Ενεργειακά κριτήρια και σχετικά θεωρήματα της μεθόδου

Η ενεργειακή μέθοδος βασίζεται στα ακόλουθα δύο ύψιστης σημασίας ενεργειακά κριτήρια, που έχουν ως εξής:

#### 1. Κριτήριο ισορροπίας\*

Ένα συντηρητικό σύστημα υπό στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια θέση, όταν το συνολικό δυναμικό  $V_T$  έχει στάσιμη τιμή στη θέση αυτή.

Πρόκειται συνεπώς για **ικανή και αναγκαία συνθήκη ισορροπίας**, η οποία (για διακεκριμένα συστήματα) ισοδυναμεί με τον ταυτόχρονο μηδενισμό των 1<sup>ων</sup> παραγώγων του συνολικού δυναμικού ως προς όλες τις γενικευμένες συντεταγμένες, απ' όπου απορρέουν οι **εξισώσεις ισορροπίας**, οι οποίες γράφονται ως:  $\frac{\partial V_T}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

#### 2. Κριτήριο ευστάθειας (θεώρημα Lagrange – Dirichlet)

Μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι **ευσταθής** (για μικρού μεγέθους διαταραχή), αν το συνολικό δυναμικό, που αντιστοιχεί στην κατάσταση αυτή έχει **σχετικό (τοπικό) ελάχιστο**

### Κριτήριο 2<sup>ης</sup> μεταβολής – γενικευμένες συνθήκες ευστάθειας κρίσιμου σημείου ισορροπίας

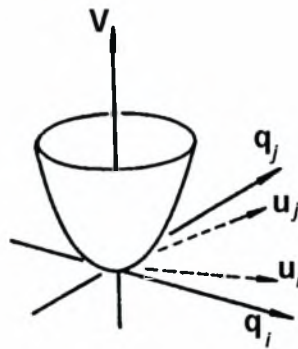
Σύμφωνα με τα όσα εκτέθηκαν προηγούμενα, η μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας (συμπεριλαμβανόμενων και των κρίσιμων, δηλαδή των οριακών και διακλαδικών σημείων) έγκειται στον προσδιορισμό των ακρότατων της συνάρτησης του συνολικού δυναμικού  $V_T$ , στην υπό εξέταση θέση ισορροπίας. Η  $V_T$  στη περίπτωση διακεκριμένου συστήματος είναι συνήθως μια μη γραμμική μονότιμος συνεχής συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων  $q_i, \quad i = 1 \div n$  και επίσης συνήθως γραμμική

---

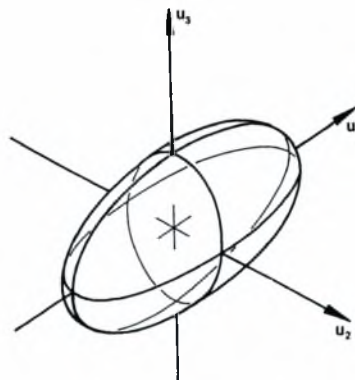
\* Αρχή της Στάσιμης Τιμής της Δυναμικής Ενέργειας



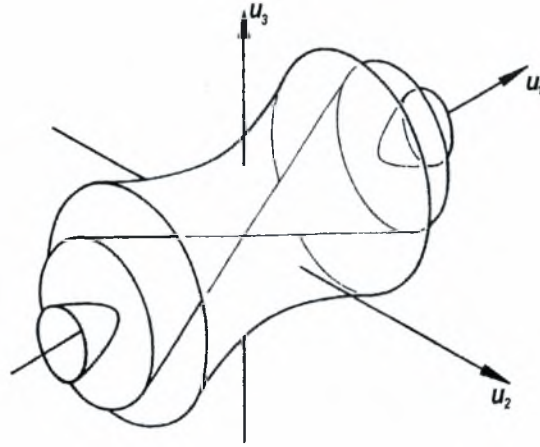
συνάρτηση του εξωτερικού φορτίου  $\lambda$ , δηλαδή η  $V_T = V_T(q_i; \lambda)$  είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση των  $q_i$  και  $\lambda$ . Για τον λόγο αυτό υπάρχει η πιθανότητα ένα σημείο ισορροπίας είτε να παρουσιάζει ευστάθεια ως προς όλες τις γενικευμένες συντεταγμένες είτε ευστάθεια σε σχέση με μερικές από αυτές και αστάθεια ως προς τις υπόλοιπες. Η 1<sup>η</sup> πιθανότητα παρουσιάζεται γραφικά στα Σχήματα 2.9 και 2.10, ενώ η 2<sup>η</sup> στα Σχήματα 2.11. και 2.12 (που αντιστοιχεί στο λεγόμενο σημείο σέλας).



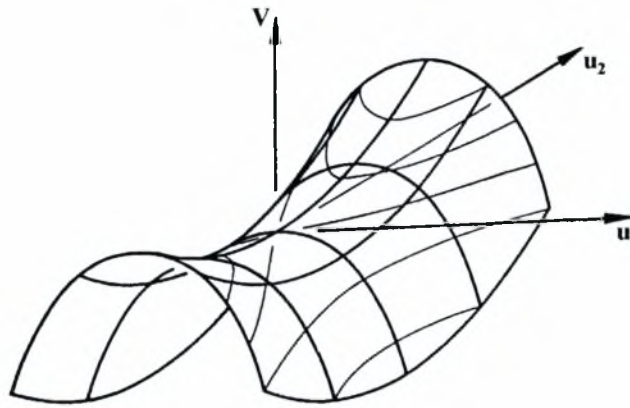
Σχήμα 2.9. Μια αμετάβλητη επιφάνεια συνολικής ενέργειας ευσταθούς σημείου ισορροπίας έναντι μετασχηματισμού συντεταγμένων.



Σχήμα 2.10. Ισοϋψείς της συνάρτησης συνολικού δυναμικού περί ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 2.11. Ισοϋψείς της συνάρτησης συνολικού δυναμικού, που επιτρέπουν ευστάθεια ως προς  $u_2$  και  $u_3$  αλλά ευστάθεια ως προς  $u_1$ .



Σχήμα 2.12. Επιφάνεια συνολικού δυναμικού, που εμφανίζει ευστάθεια ως προς  $u_2$  αλλά αστάθεια ως προς  $u_1$  (σημείο σέλας, saddle point).

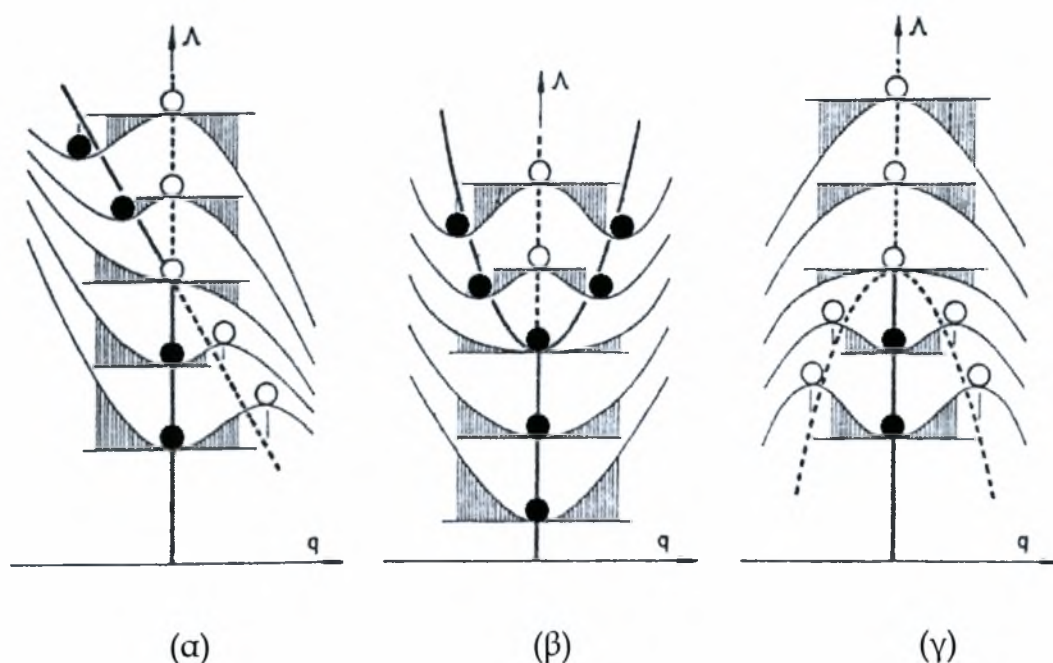
Με βάση τις αρχές τόσο του Λογισμού των Μεταβολών όσο και της Θεωρίας των Μητρώων διατυπώνεται το λεγόμενο **κριτήριο της 2<sup>ης</sup> μεταβολής**, σύμφωνα με το οποίο αν η 2<sup>η</sup> μεταβολή  $\delta^2 V_T$  του συνολικού δυναμικού σε θέση ισορροπίας οποιουδήποτε διακεκριμένου συντηρητικού συστήματος είναι θετικά ορισμένη ( $\delta^2 V_T > 0$ ), τότε η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής<sup>⊥</sup>. Το κριτήριο αυτό αποτελεί μια ικανή συνθήκη ευστάθειας, αφού το αντίστροφο του, δηλαδή όταν το συνολικό δυναμικό σε μια θέση ισορροπίας έχει τοπικό ελάχιστο, δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι στη θέση αυτή θα ισχύει  $\delta^2 V_T > 0$ . Αντίστοιχα, αν η  $\delta^2 V_T$  είναι αρνητικά ορισμένη ( $\delta^2 V_T < 0$ ), τότε το συνολικό δυναμικό

<sup>⊥</sup> καθόσον τότε η  $V_T$  έχει σχετικό (τοπικό) ελάχιστο



έχει σχετικό (τοπικό) μέγιστο και η αντίστοιχη θέση ισορροπίας είναι *ασταθής*. Όμοια, η  $\delta^2 V_T$  είναι *μη ορισμένη* συνάρτηση, το συνολικό δυναμικό δεν έχει σχετικό ελάχιστο, οπότε σύμφωνα με το 1<sup>ο</sup> θεώρημα *Lyapunov* η σχετική θέση ισορροπίας είναι *ασταθής*. Αν όμως η  $\delta^2 V_T$  είναι θετικά *ημιορισμένη* (δηλαδή υπάρχει θέση ισορροπίας για την οποία  $\delta^2 V_T = 0$ ) ή αν ισχύει ότι  $\delta^2 V_T \equiv 0$ , τότε η  $V_T$  μπορεί να έχει ή να μην έχει ελάχιστο στη θέση αυτή, οπότε απαιτείται περαιτέρω έρευνα, μέσω της μελέτης μεταβολών ανώτερης τάξης<sup>~</sup>. Τα σημεία ισορροπίας, στα οποία η  $\delta^2 V_T$  είναι θετικά ημιορισμένη, είναι *κρίσιμα*, γεγονός που ισοδυναμεί με τον μηδενισμό της ορίζουσας ευστάθειας της τετραγωνικής μορφής της  $\delta^2 V_T$ .

Στο Σχήμα 2.13 απεικονίζεται η μορφή της καμπύλης του συνολικού δυναμικού για τους τρεις τύπους σημείων διακλάδωσης, σε χαρακτηριστικά σημεία του προ- και μεταλυγισμικού κύριου και δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας.



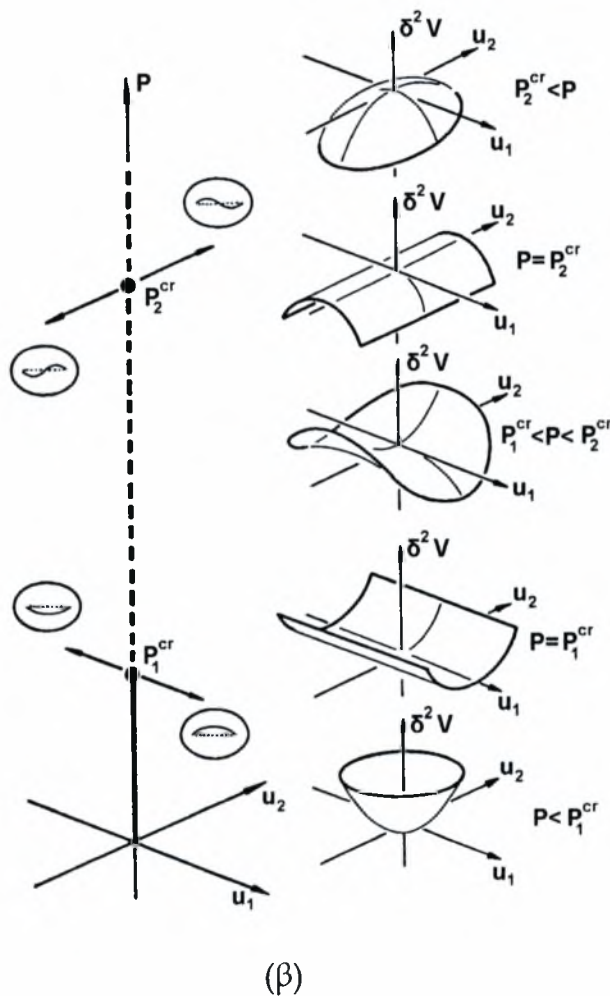
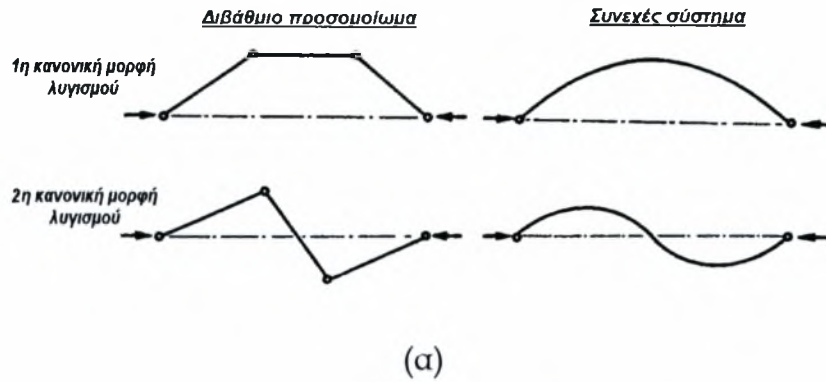
Σχήμα 2.13. Δρόμοι ισορροπίας και μορφή της συνάρτησης συνολικού δυναμικού για (α) ασύμμετρο, (β) συμμετρικό ευσταθές και (γ) συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης.

<sup>~</sup> Σύμφωνα με το 1<sup>ο</sup> θεώρημα *Lyapunov* αν μια περιττής τάξης μεταβολή είναι διάφορη του μηδενός σε κάποιο σημείο ισορροπίας, τότε το σημείο αυτό είναι *ασταθές*

#### A.1.4. Ο ρόλος των μαθηματικών προσομοιώματων (προτύπων)

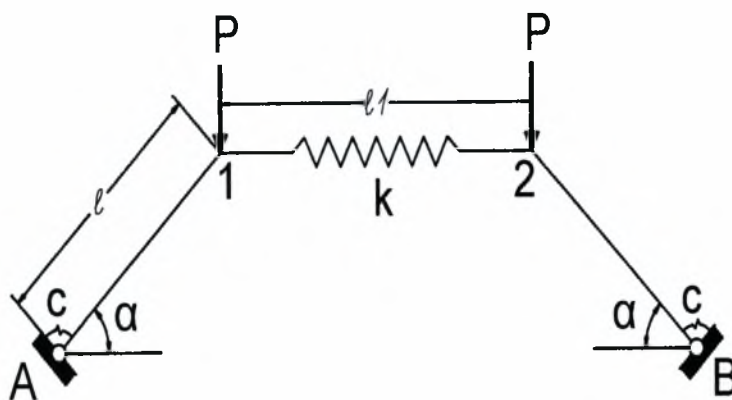
Είναι κοινά παραδεκτό και γνωστό εκ πείρας στην Επιστήμη του Μηχανικού ότι είναι εξαιρετικά δυσχερές να ληφθούν υπ' όψη όλες οι παράμετροι, οι οποίες επηρεάζουν την εντατική κατάσταση μιας κατασκευής και από τις οποίες εξαρτάται η συμπεριφορά αυτής. Καθίσταται ως εκ τούτου αναγκαία η αντικατάσταση της πραγματικής κατασκευής (συνεχούς, απειροβάθμιου συστήματος), μετά από μια σειρά απλοποιητικών παραδοχών, με ένα μαθηματικό προσομοίωμα (πρότυπο, μοντέλο) για τον προσδιορισμό της έντασης και της παραμόρφωσης, του οποίου λαμβάνονται υπ' όψη μόνον εκείνες οι παράμετροι, που είναι χαρακτηριστικές της συμπεριφοράς της πραγματικής κατασκευής. Αναμφίβολα η αντικατάσταση αυτή με ένα προσομοίωμα εντατικά ισοδύναμο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της όλης μελέτης. Αρχικά καθορίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρίας, της φόρτισης και των ιδιοτήτων του υλικού της πραγματικής κατασκευής (αναζήτηση του λεγόμενου φυσικού πρότυπου) και στη συνέχεια αναζητείται το εντατικά ισοδύναμο μαθηματικό προσομοίωμα, που θα την αντικαταστήσει. Σε περίπτωση δε κατά την οποία μέσω του προσομοιώματος αυτού είναι επιθυμητός και ο έλεγχος της ευστάθειας της κατασκευής, μια επιπρόσθετη παράμετρος που οπωσδήποτε πρέπει να συμπεριληφθεί – προστεθεί είναι η γεωμετρική μη γραμμικότητα, η οποία είναι αναγκαία για τον καθορισμό της πραγματικής φέρουσας ικανότητας μιας λεπτής κατασκευής. Φυσικά, η προσπάθεια για τον καθορισμό ενός μαθηματικού προτύπου δεν είναι πάντοτε δυνατόν να οδηγήσει σε ένα ακριβές (εντατικά ισοδύναμο) υποκατάστατο της πραγματικής κατασκευής, και συνήθως η προσομοίωση καταλήγει σε κατά προσέγγιση ισοδύναμα μαθηματικά πρότυπα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα προσομοίωσης της συμμετρικής και αντισυμμετρικής συμπεριφοράς σε λυγισμό λόγω αξονικής θλίψης αποτελεί το διβάθμιο μοντέλο εκ τριών αβαρών ράβδων μιας αμφιαρθρωτής δοκού που φαίνεται στο Σχήμα 2.14α, ο κύριος δρόμος ισορροπίας του οποίου με τα δύο σημεία διακλάδωσης (που

αντιστοιχούν σε λυγισμό πρώτης και δεύτερης κανονικής μορφής) φαίνεται στο Σχήμα 2.14β.

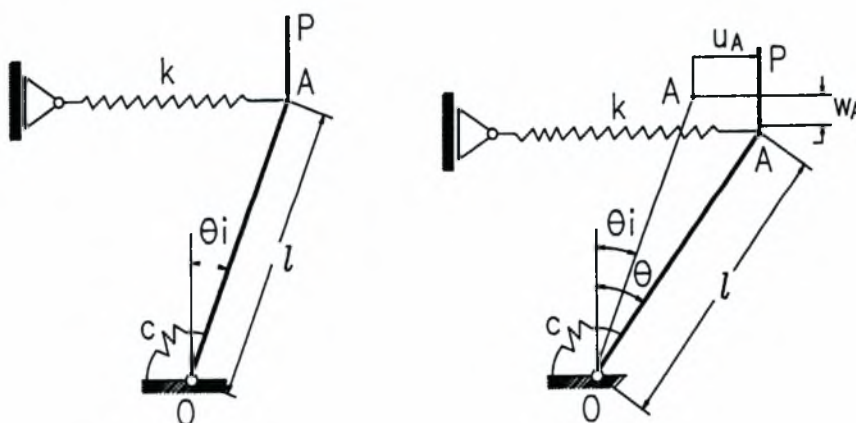


Σχήμα 2.14. Διβάθμιο προσομοίωμα λυγισμού λόγω αξονικής θλίψης μιας αμφιαρθρωτής δοκού (α) και διακλαδικά σημεία επί του κύριου (τετριμμένου) δρόμου ισορροπίας, που οδηγούν σε συμμετρικό λυγισμό (1η μορφή) και αντισυμμετρικό λυγισμό (2η μορφή) (β).

Οι θεωρίες αναλύσεων που εφαρμόζονται στη πράξη για κελύφη, πλάκες και δοκούς είναι παραδείγματα, στα οποία - μετά από κάποιες απλοποιητικές παραδοχές - η τρισδιάστατη εντατική κατάσταση ανάγεται σε δισδιάστατη για τους επιφανειακούς φορείς και σε μονοδιάστατοι για τους γραμμικούς. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1960 επινοήθηκαν και μελετήθηκαν πολλά μοντέλα για την προσομοίωση της ανάλυσης σε ευστάθεια ενός μεγάλου αριθμού γραμμικών και επιφανειακών φορέων, μέσω των οποίων καταδείχτηκαν με σαφήνεια όλοι οι τύποι στατικής αστάθειας των κατασκευών. Μεταξύ αυτών τα πλέον αξιόλογα και χαρακτηριστικά παρουσιάζονται στα Σχήματα 2.15 - 2.25.

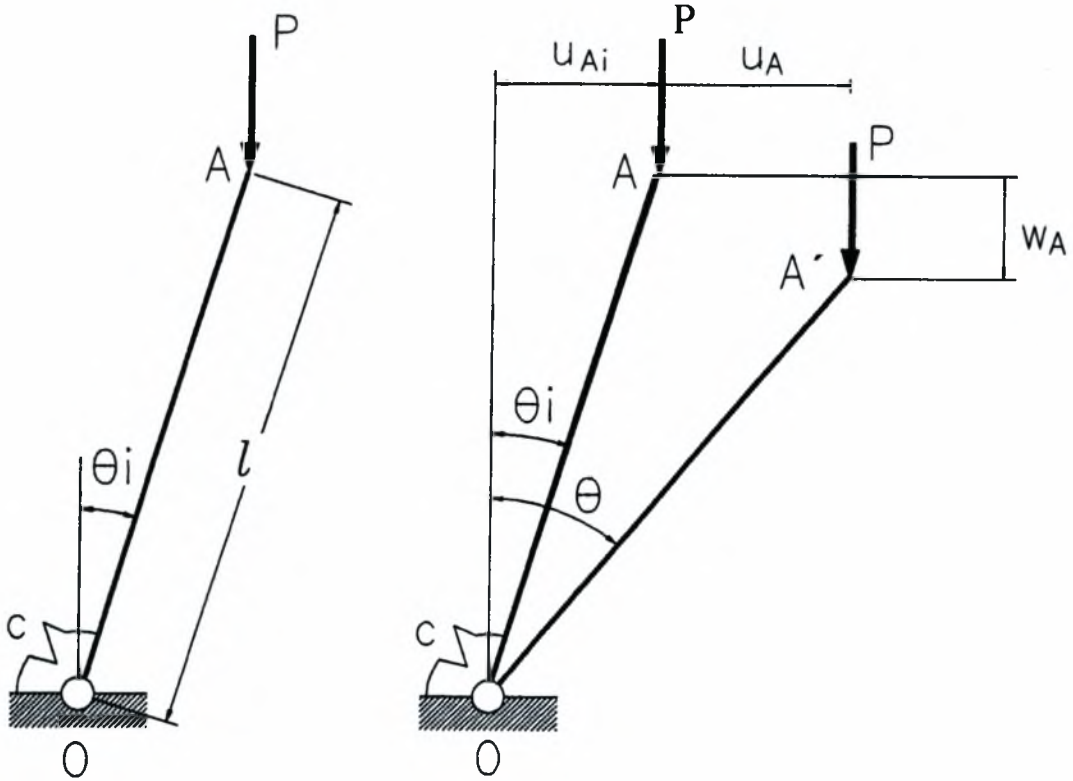


**Kerr - Soifer (1969)**

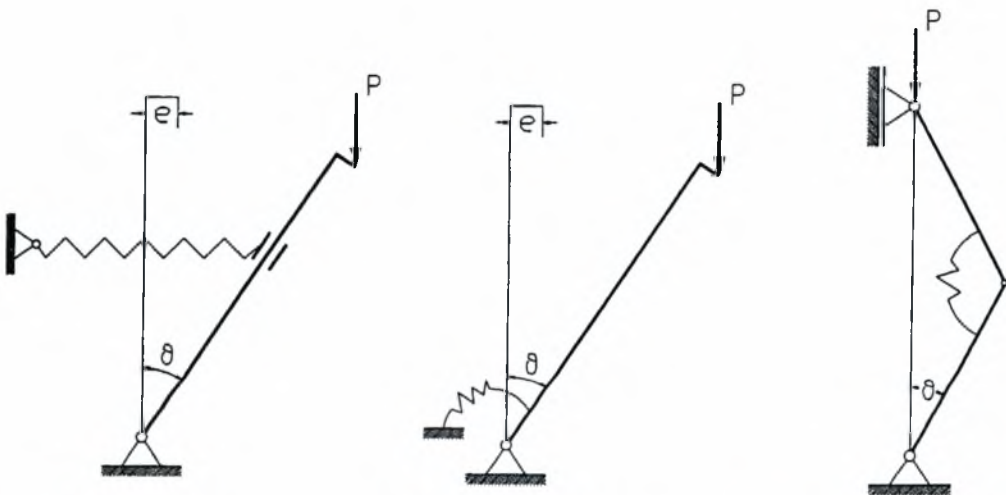


**Augusti (1964)**

Σχήμα 2.15. Χαρακτηριστικά προσομοιώματα (μοντέλα) για την μελέτη διάφορων τύπων στατικής αστάθειας.



**Augusti (1964)**



**Koiter (1962)**

**Augusti (1961)**

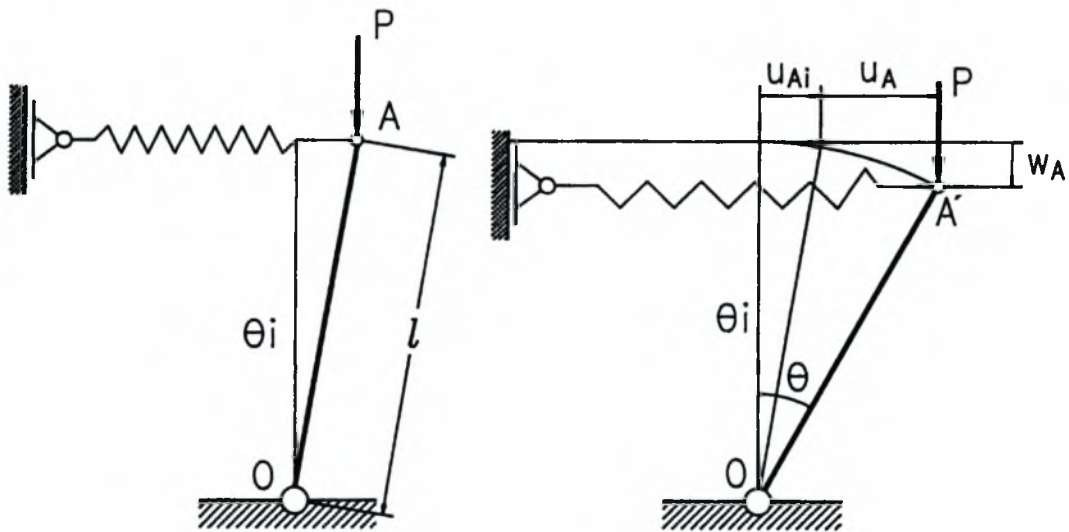
**Croll & Walker (1972)**

**Zaslavsky (1968)**

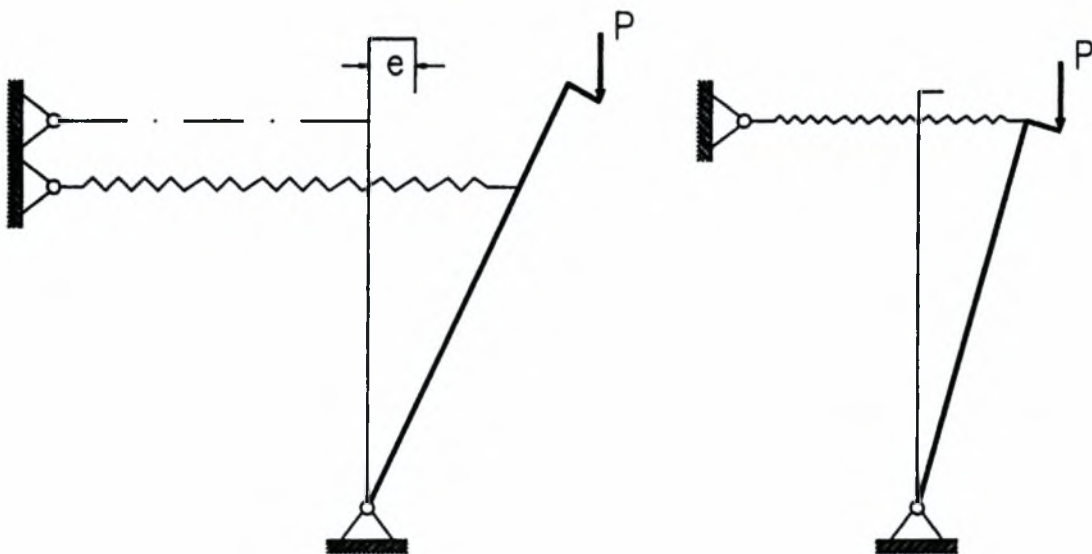
**Chajes (1969)**

Σχήμα 2.16. Προσομοιώματα ευσταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης.





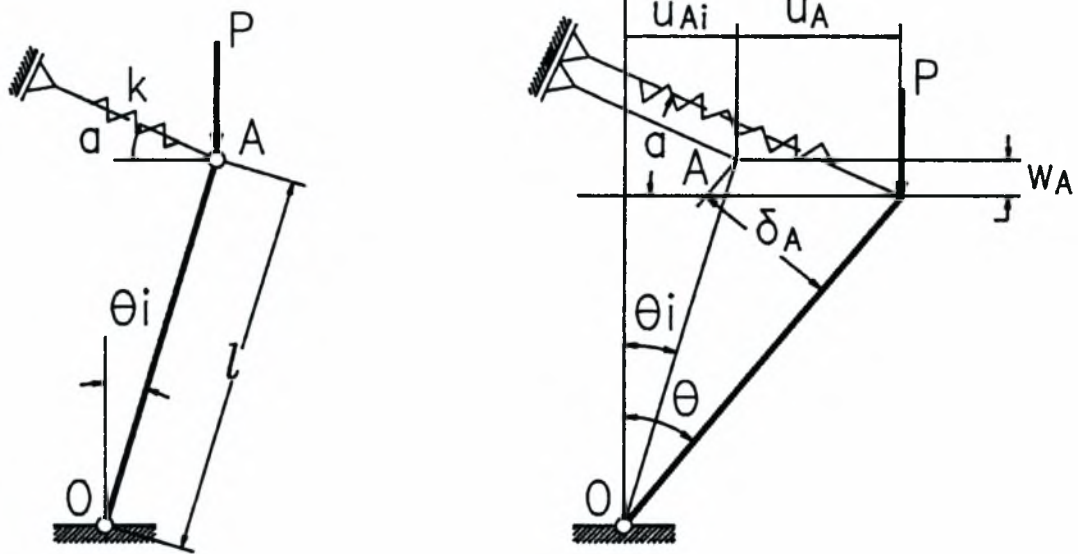
**Augusti (1964)**



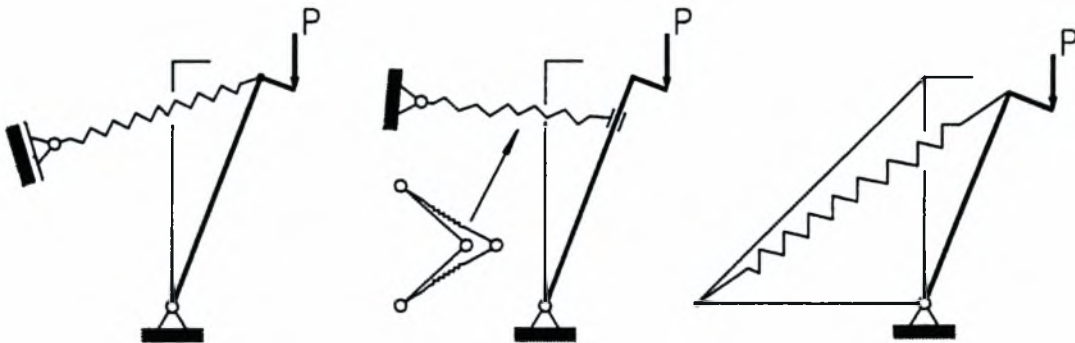
**Koiter (1962)**

**Augusti (1961)**

Σχήμα 2.17. Προσομοιώματα ασταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης.



**Zanaboni (1961), Augusti (1964)**

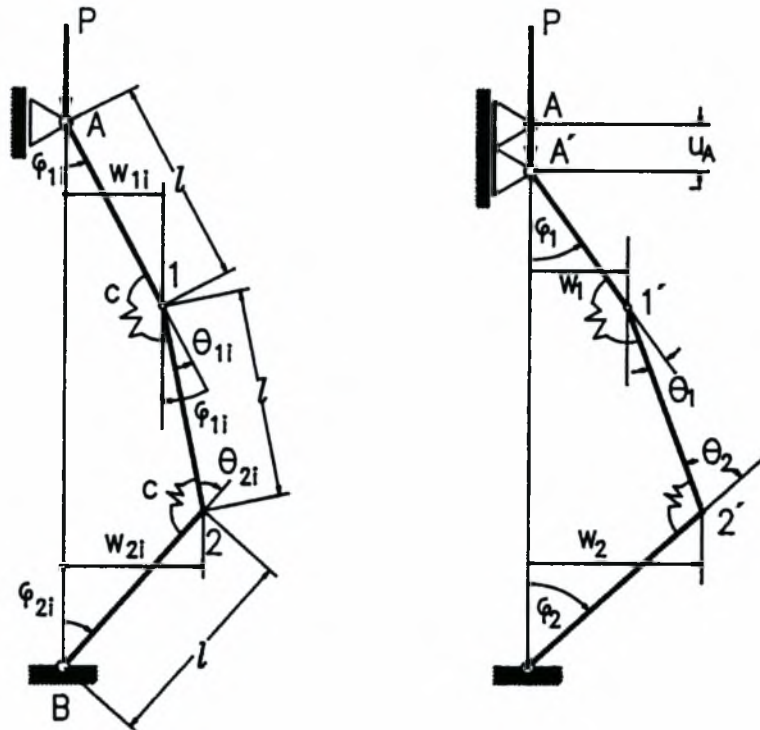


**Augusti (1961)**

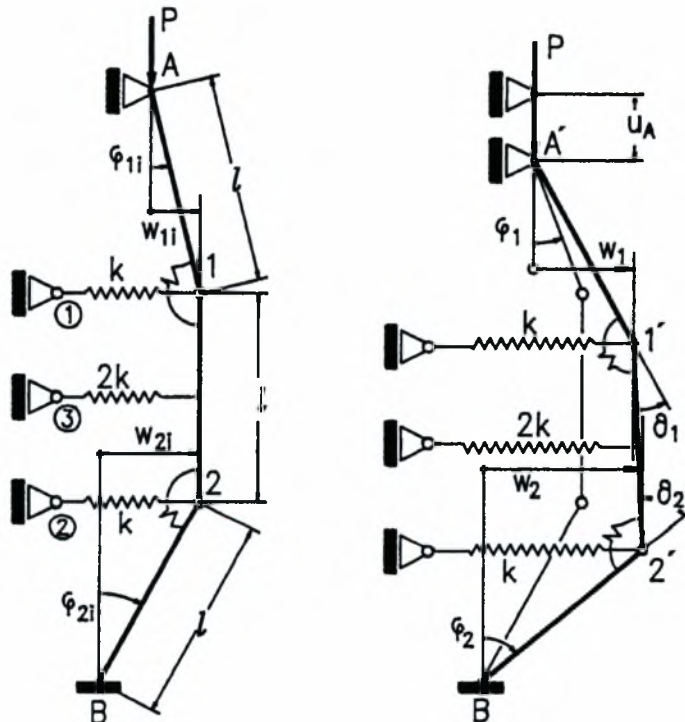
**Koiter (1962)**

**Thompson (1965)**

Σχήμα 2.18. Προσομοιώματα ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης.



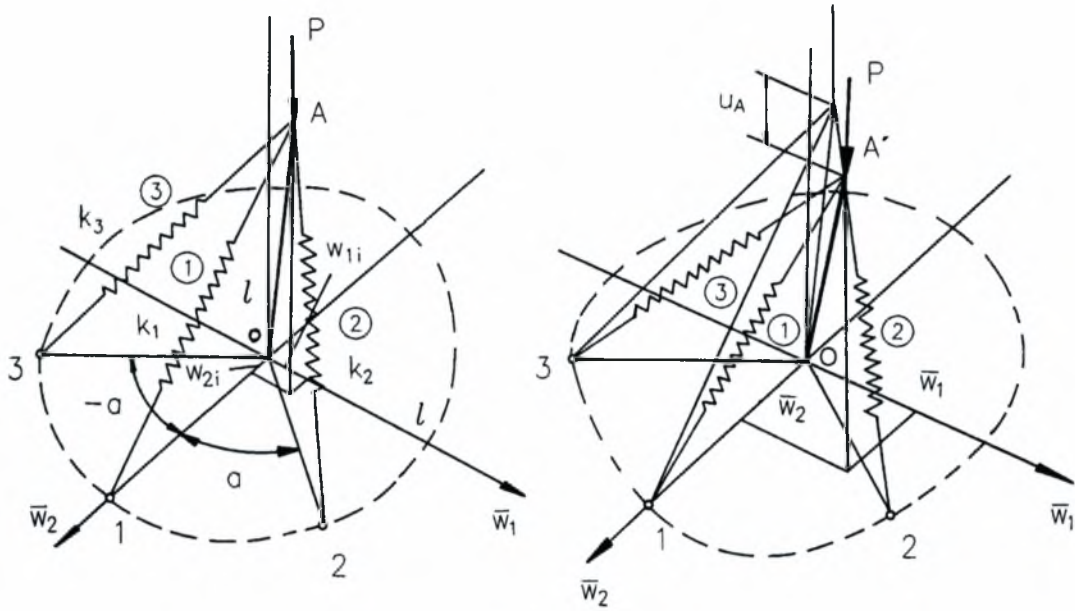
*Croll & Walker (1972), Thompson & Hunt (1973)*



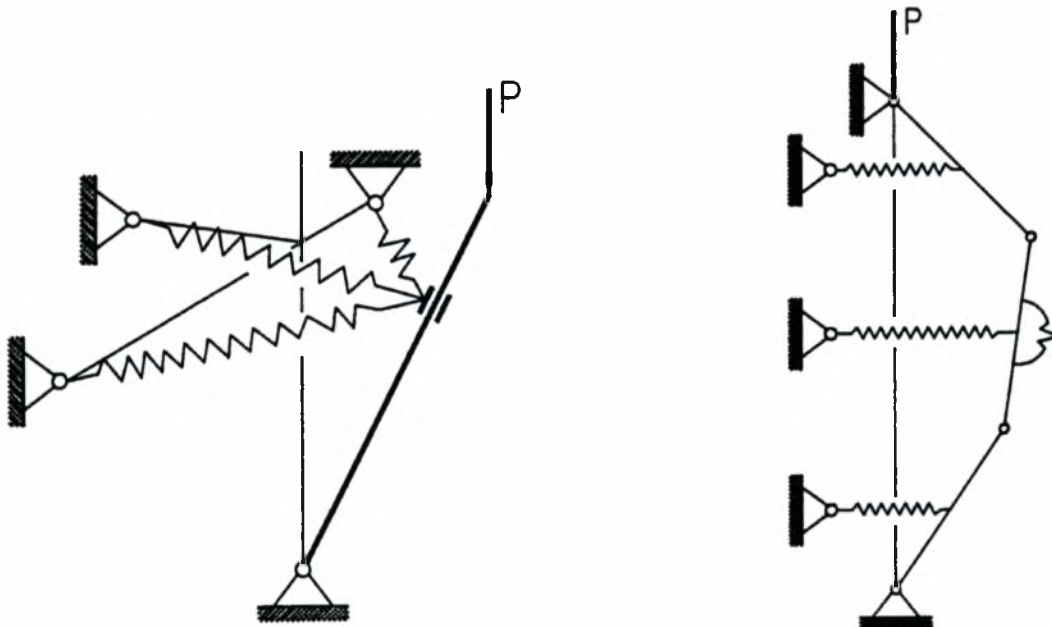
*Stein (1959), Supple & Chilver (1967)*

Σχήμα 2.19. Προσομοιώματα για τη μελέτη συζευγμένων και μη συζευγμένων διακλαδώσεων.





**Thompson - Gaspar (1977)**

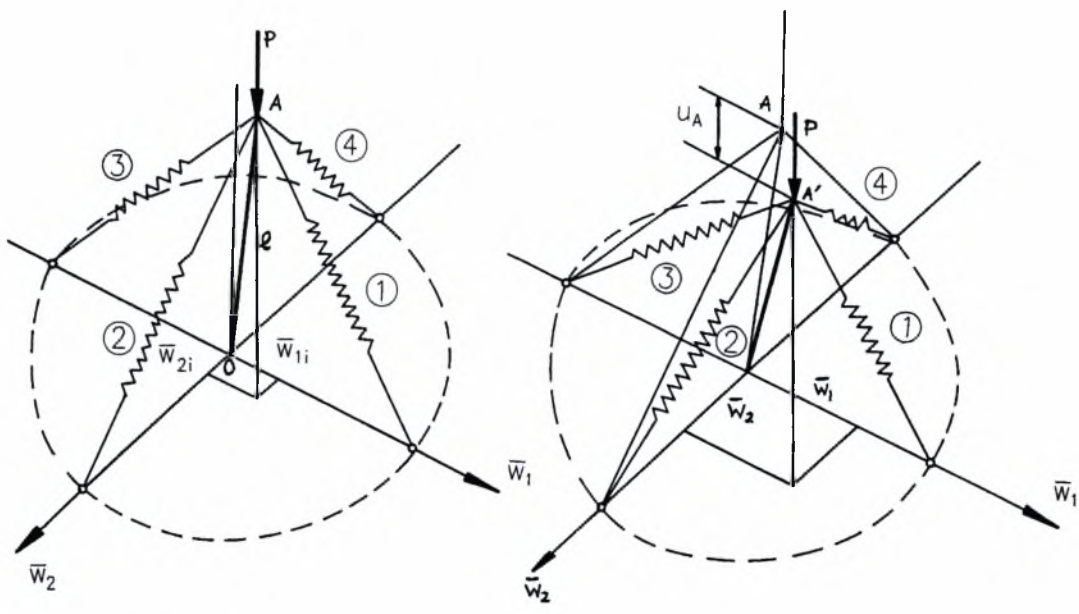


**Koiter (1962)**

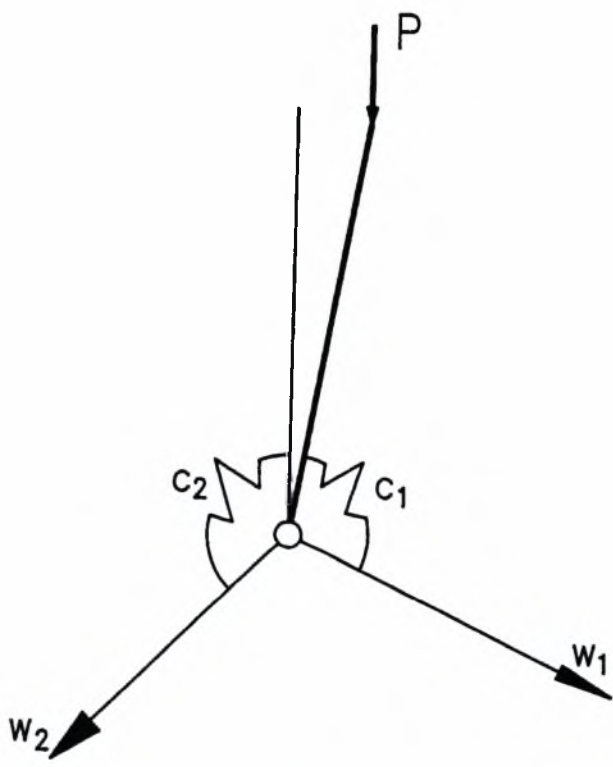
**Chilver (1967)**

**Huseyin (1975)**

Σχήμα 2.20. Προσομοιώματα για τη μελέτη ημιταυτόχρονων και ταυτόχρονων ημισυμμετρικών διακλαδώσεων.

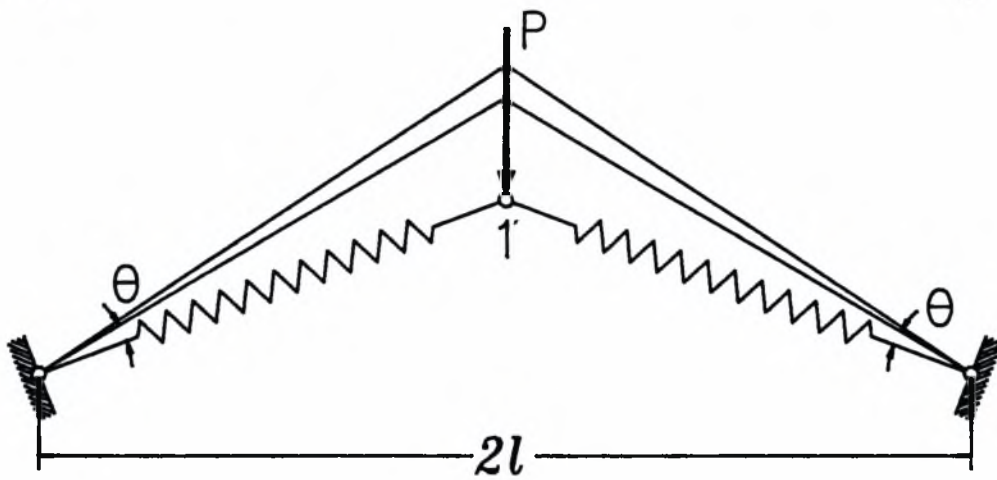
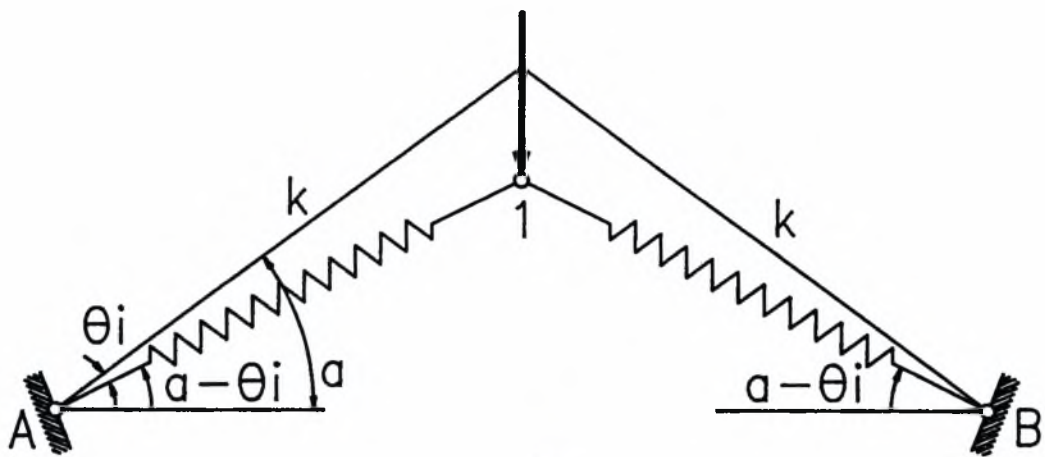


Gaspar (1977), Gioncu & Ivan (1979)

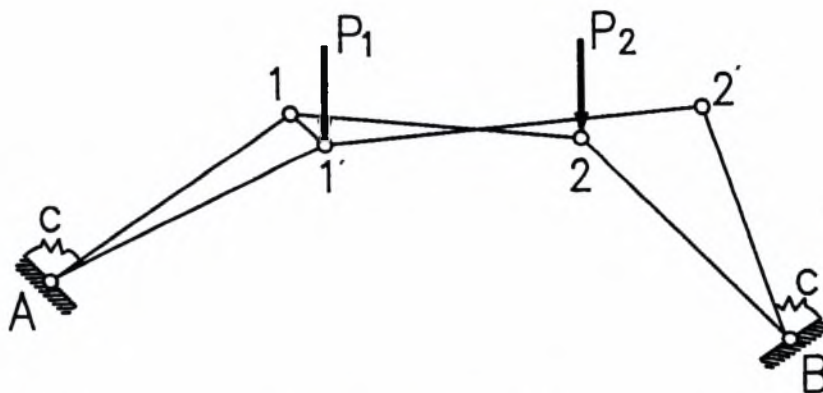


Augusti (1964)

Σχήμα 2.21. Προσομοιώματα για τη μελέτη ταυτόχρονων διακλαδώσεων διπλής συμμετρίας.

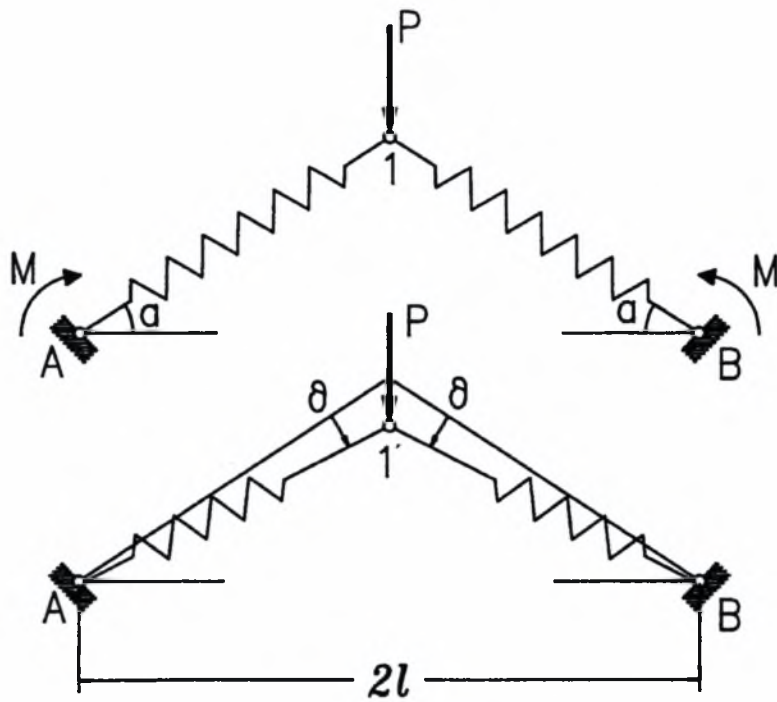


*von Mises*

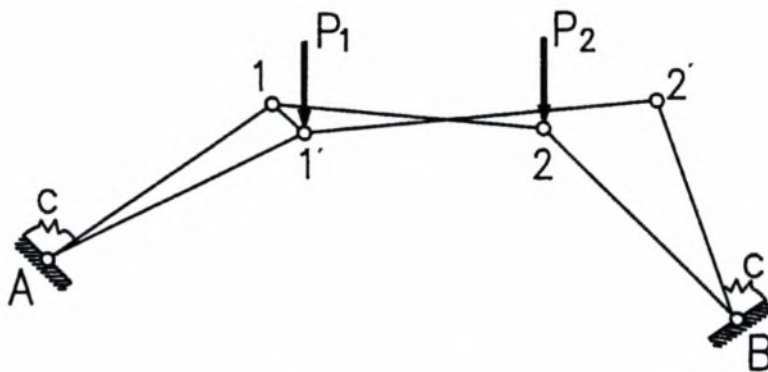


*Croll & Walker (1972)*

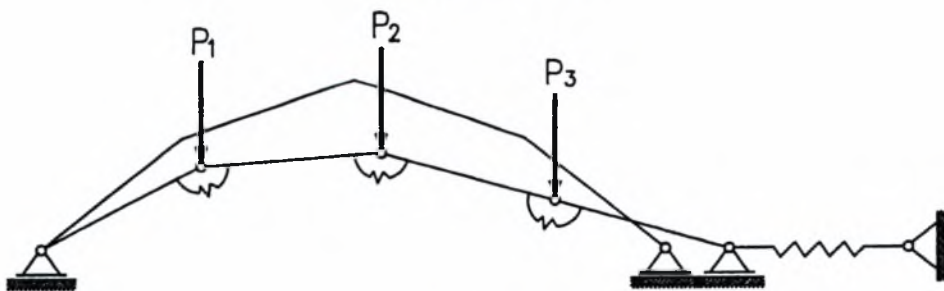
Σχήμα 2.22. Προσομοιώματα οριακού σημείου.



*Huseyin (1975)*

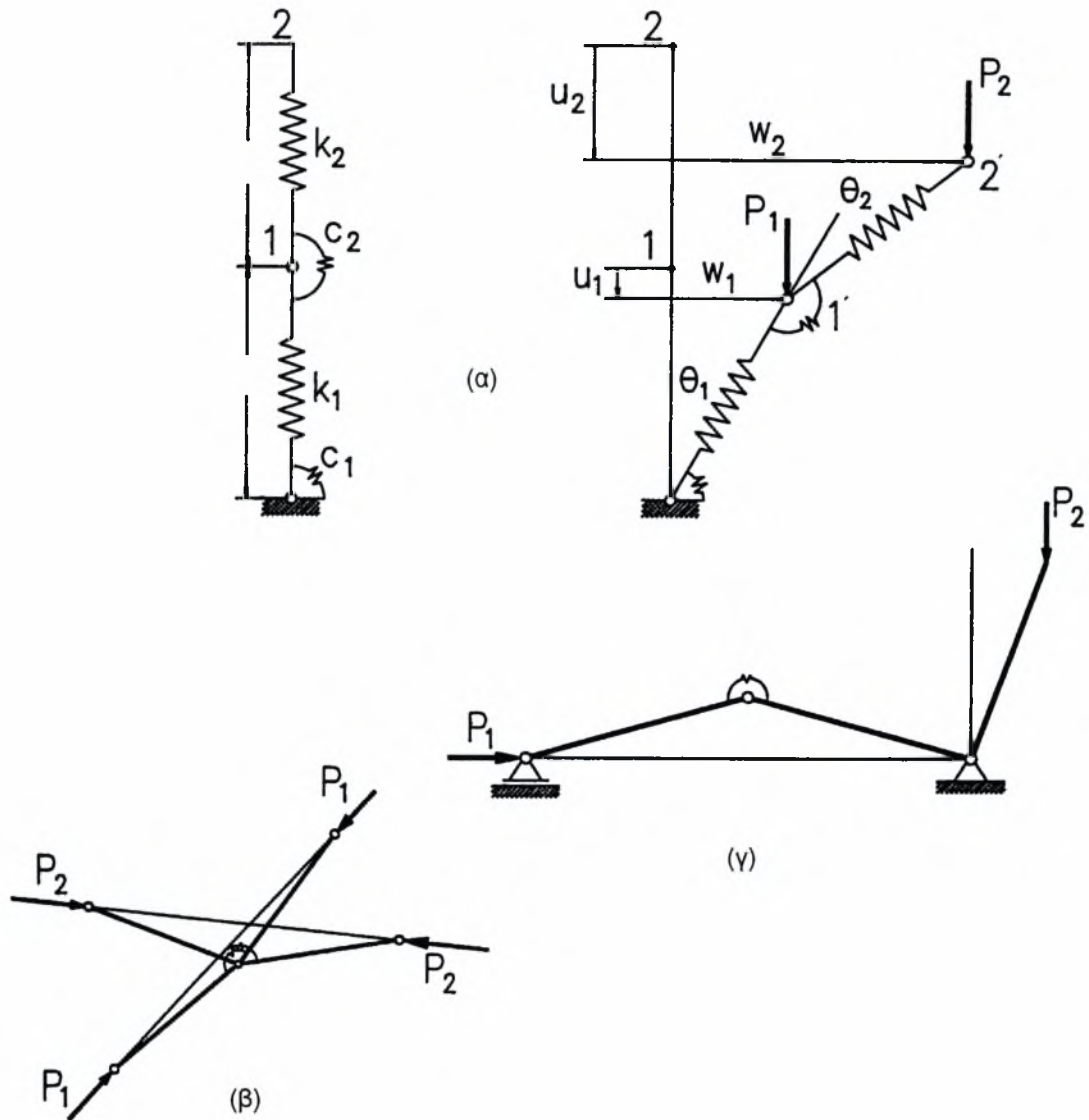


*Huseyin (1976)*



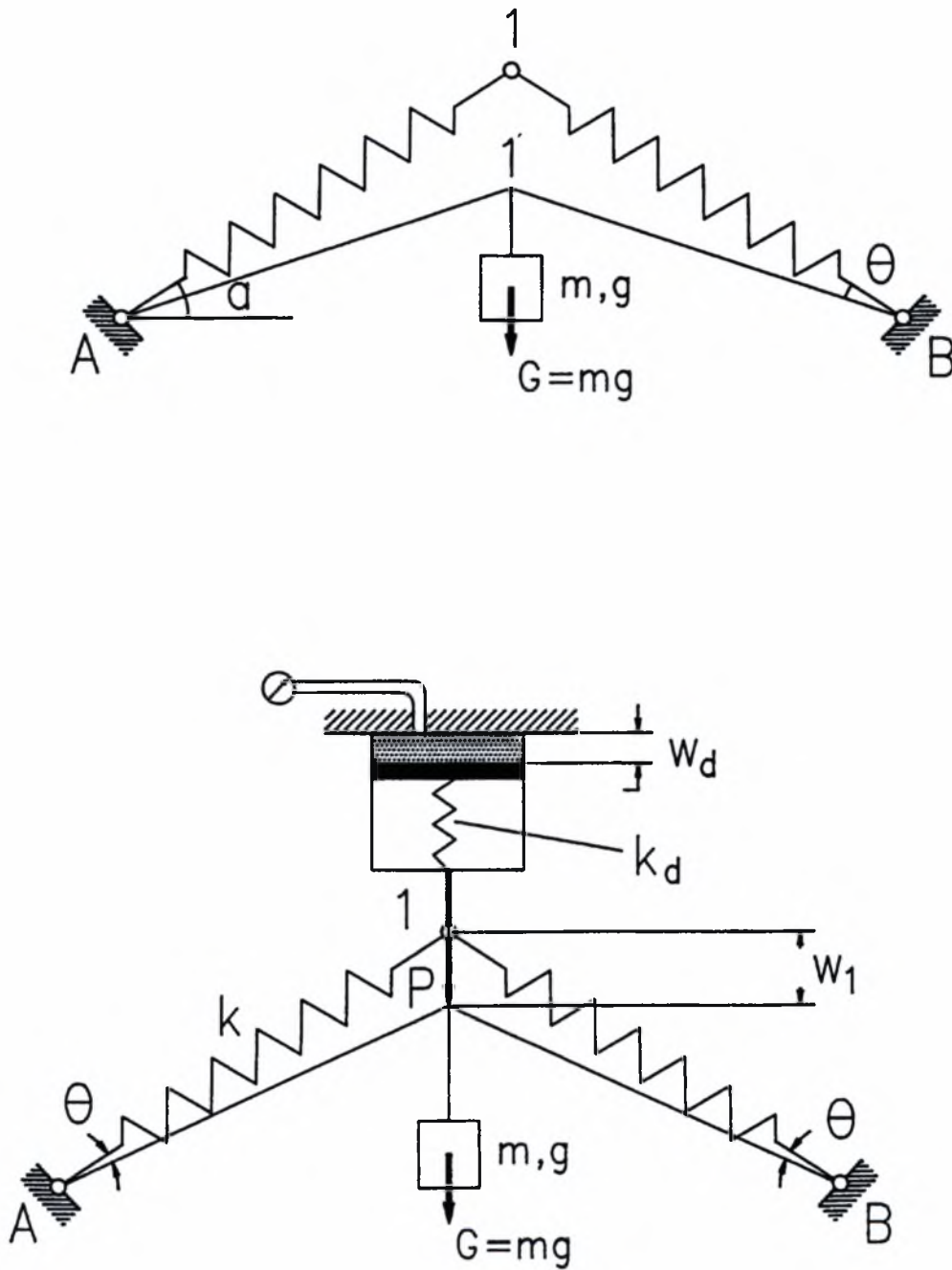
*Welton (1978)*

Σχήμα 2.23. Προσομοιώματα για τη μελέτη αστάθειας μέσω γενικών κρίσιμων σημείων.



(a) Huseyin (1975) , (β) Croll & Walker (1972), (γ) Zaslavsky (1968)

Σχήμα 2.24. Προσοιώματα για τη μελέτη αστάθειας μέσω ειδικών κρίσιμων σημείων.



Σχήμα 2.25. Μελέτη ευστάθειας με προσομοιώματα όπου οι δράσεις εξαρτώνται από δομικές παραμορφώσεις.



### Ατέλειες και διαταραγμένες διακλαδώσεις

Σε πολλές φυσικές επιστήμες, συμπεριλαμβανόμενης και της Δομικής Μηχανικής (structural engineering) διατηρήθηκε επί μακρόν η υπόθεση ότι οι αστάθειες προκύπτουν από την μεταβολή μιας μοναδικής παραμέτρου ελέγχου, ιδία του φορτίου  $\lambda$ . Δευτερεύουσες παράμετροι ελέγχου, και μερικές φορές ούτε υποχρεωτικά κάποιες ατέλειες, εισάγονται εκ των υστέρων, αφού η βασική συμπεριφορά λόγω μεταβολής του  $\lambda$  έχει αναλυθεί.

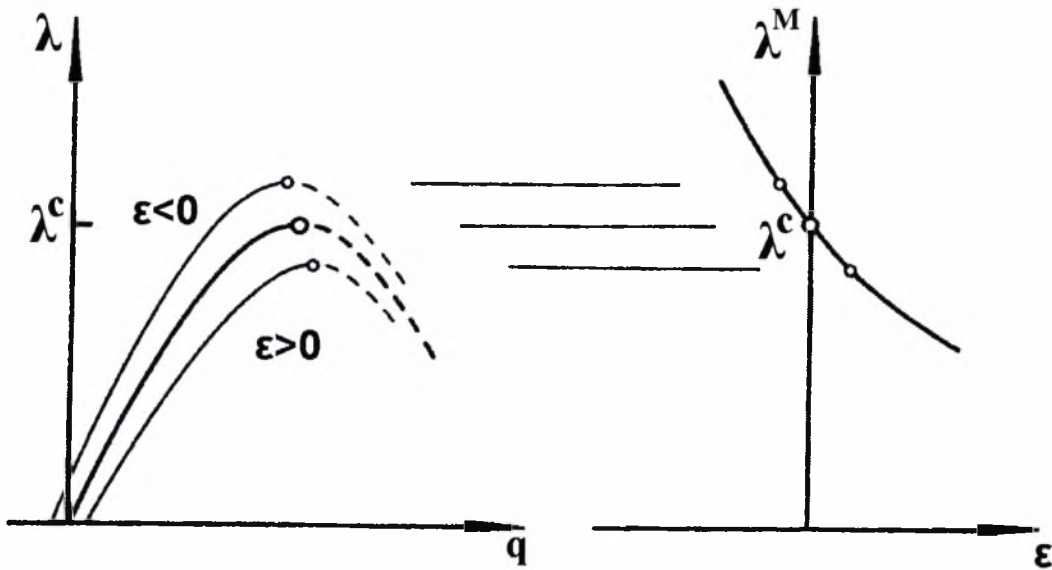
Μια μοναδική παράμετρος ελέγχου οδηγεί φυσικά στην εξέταση των *δρόμων ισορροπίας* (equilibrium paths) στο χώρο  $\lambda - q_i$  (όπου  $q_i$  οι βαθμοί ελευθερίας - ενεργές συντεταγμένες του εξεταζόμενου δομικού συστήματος), και η εισαγωγή δευτερευουσών παραμέτρων «ατελειών», οι οποίες συνήθως έχουν μικρές τιμές, θεωρούνται ως διαταραχές του αρχικού συνόλου των δρόμων ισορροπίας. Η συγκεκριμένη θεώρηση ανήκει στη λεγόμενη διακλαδική οπτική γωνία. Πλην όμως, έχει από καιρού αναγνωριστεί πως *όλες οι παράμετροι ελέγχου μπορούν να θεωρηθούν ως ισοδύναμες*, γεγονός που οδήγησε στην μελέτη των *επιφανειών ισορροπίας* στο *πλήρη χώρο  $\lambda_j - q_i$* . Ιδιαίτερα δε μετά την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Καταστροφών κατέστη η μελέτη-ανάλυση των επιφανειών ισορροπίας πολλή ελκυστική παγκοσμίως. Προς τούτο, η ενοποιημένη προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία *όλες οι παράμετροι ελέγχου θεωρούνται ότι συμμετέχουν με την ίδια σπουδαιότητα στη συμπεριφορά ενός συστήματος*, είναι με απλά λόγια η οπτική γωνία της Θεωρίας των Καταστροφών.

Στις επόμενες υποπαραγράφους παρατίθεται μια συνοπτική, πλην όμως κατατοπιστική περιγραφή της *σχέσης* μεταξύ της *ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες* (imperfection sensitivity) και της (τοπολογικής) *δομικής ευστάθειας* ορισμένων *μορφών διακλαδώσεων*. Για περαιτέρω εμβάθυνση επί θεμάτων σχετιζόμενων με βελτιστοποίηση και σχεδιασμό πραγματικών κατασκευών μπορεί κανείς να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία.

Στην παρούσα εργασία, η οποία πραγματεύεται την ανάλυση ενός μη γραμμικού προσομοιώματος ασυμπίεστου ελαστικού στύλου με απλές ελαστικές στηρίξεις, θα υπάρξει αναλυτική αναφορά και συσχέτιση της διακλαδικής συμπεριφοράς με τη Θεωρία των Καταστροφών και ιδιαίτερα με ανωμαλίες με μία γενικευμένη συντεταγμένη (order of one-mode singularity).

Θεωρούμε – σύμφωνα με τα παραπάνω – ένα σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση δυναμικού  $V = V(q, \lambda, \varepsilon, \alpha, \beta)$ , όπου  $q$  μια μοναδική ενεργός συντεταγμένη (πρόκειται περί μονοβάθμιου συντηρητικού συστήματος) και  $\lambda, \varepsilon, \alpha, \beta$  παράμετροι ελέγχου. Υπό τη διακλαδική οπτική γωνία το  $\lambda$  αντιπροσωπεύει το φορτίο και το  $\varepsilon$  μια παράμετρο ατέλειας, που διαταράσσει το σύστημα, και  $\alpha, \beta$  είναι γεωμετρικές παράμετροι. Για παράδειγμα το  $\varepsilon$  θα μπορούσε να είναι το εύρος μιας αρχικής παραμόρφωσης. Έτσι, αν  $\varepsilon = 0$ , η  $V$  περιγράφει τη συμπεριφορά κάποιου *τέλειου συστήματος*, και μεταβάλλοντας το  $\varepsilon$  παράγεται μια οικογένεια σχετικών *ατελών συστημάτων*.

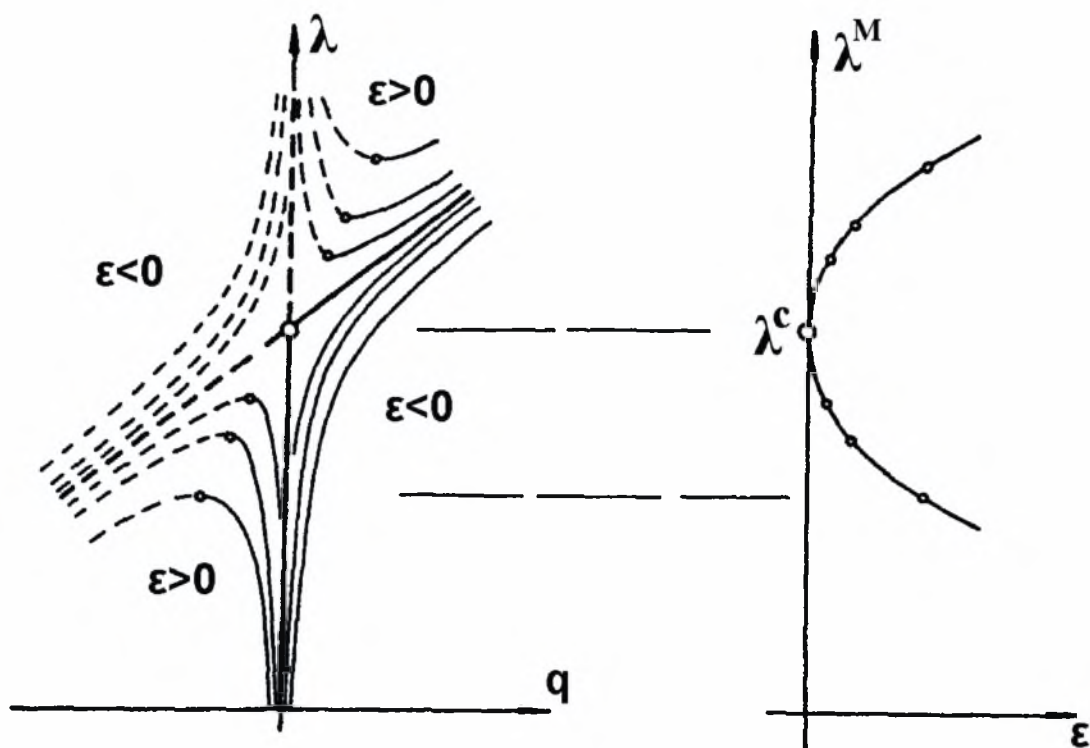
Εξετάζεται στη συνέχεια η περίπτωση που το τέλειο σύστημα αλλά και η οικογένεια των ατελών παρουσιάζει *οριακό σημείο*, με την όλη εικόνα των δρόμων ισορροπίας και του διαγράμματος φορτίου-ατέλειας να φαίνονται στο Σχήμα 2.26.



Σχήμα 2.26. Η επιρροή των αρχικών ατελειών (διαταραχών) στους δρόμους ισορροπίας με οριακό σημείο (πτώχωση). Το δεξιό διάγραμμα δείχνει την ήπια, ομαλή ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες.

Παρατηρούμε ότι η παρουσία των ατελειών διαφοροποιεί πολύ λίγο τη συμπεριφορά του συστήματος, καθόσον και το τέλειο αλλά και τα ατελή συστήματα χάνουν την ευστάθειά τους μέσω οριακού σημείου, η δε τοπική τοπολογία παραμένει αναλλοίωτη σε σχέση με το  $\varepsilon$ . Στο δεξιό μέρος του Σχήματος 2.26 φαίνεται η ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες (μεταβολή των κρίσιμων σημείων λόγω της ατέλειας), και ο γεωμετρικός τόπος αστοχίας (failure locus) στο χώρο των παραμέτρων ελέγχου.

Τούτο δεν συμβαίνει όμως στη περίπτωση του ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης, που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.27. Εδώ η όλη εικόνα αλλάζει δραστικά παρουσία της ατέλειας, και μάλιστα με δύο διαφορετικούς τρόπους.

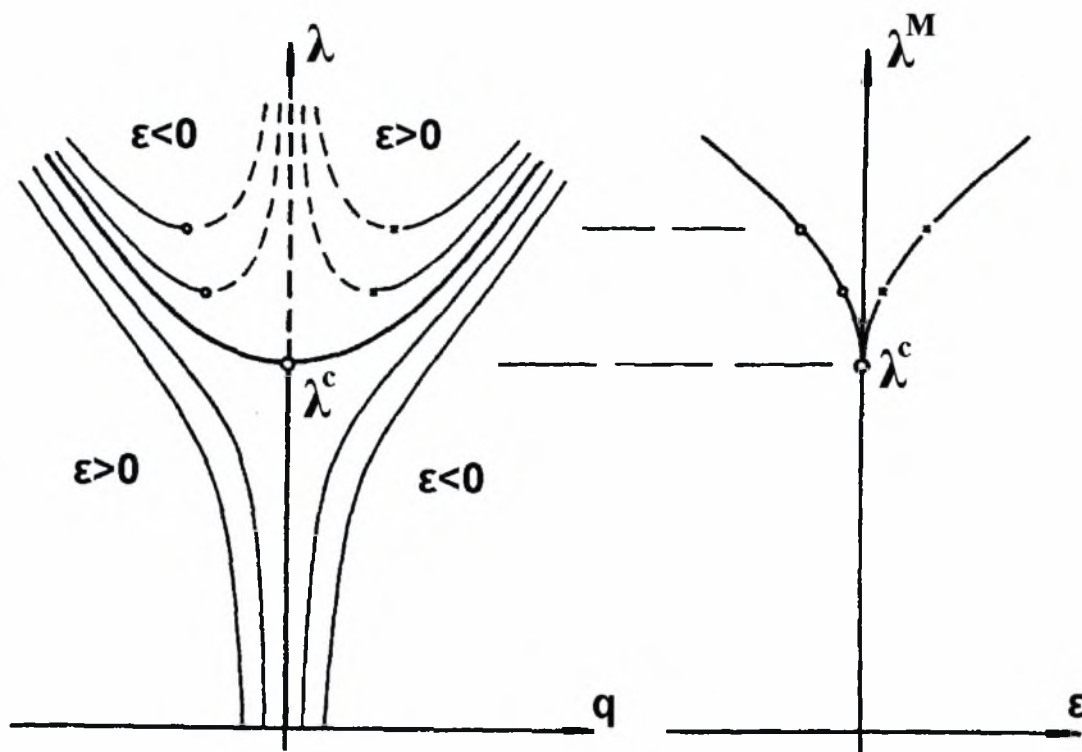


Σχήμα 2.27. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης. Αριστερά φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας και δεξιά η ισχυρή ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες.

Αναλυτικότερα, για θετικές τιμές του  $\varepsilon$ , οι τεμνόμενοι δρόμοι του τέλειου συστήματος μεταπίπτουν σε διαχωρισμένους δρόμους, οι οποίοι παρουσιάζουν οριακά σημεία, ενώ για αρνητικά  $\varepsilon$  οι δρόμοι επίσης διαχωρίζονται, χωρίς όμως να διαθέτουν κρίσιμα σημεία. Η καμπύλη της ευαισθησίας σε αρχικές ατέλειες είναι τοπικά παραβολικής μορφής και έχει άπειρη κλίση για  $\varepsilon=0$ . Έτσι, η φέρουσα ικανότητα της κατασκευής επηρεάζεται σημαντικά από την παρουσία μιας θετικής αρχικής ατέλειας, ενώ μια αρνητική επιτρέπει στο σύστημα να “δραπετεύσει” πλήρως προς την ευστάθεια ή την αστάθεια. Συνεπώς, η παράμετρος της ατέλειας είναι πολύ περισσότερο σημαντική στο σύστημα αυτό από ότι στο προηγούμενο, ενώ στο σημείο αυτό αρχίζει να εμφανίζεται με περισσότερη σαφήνεια η έννοια της δομικής ευστάθειας.

Αντίστοιχα, για το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης η τοπολογική εικόνα των τεμνόμενων δρόμων ισορροπίας του τέλειου συστήματος καταστρέφεται από μια ατέλεια  $\varepsilon$ , η οποία διασπά την

συμμετρία (symmetry-breaking), σύμφωνα με το αριστερό διάγραμμα του Σχήματος 2.28.

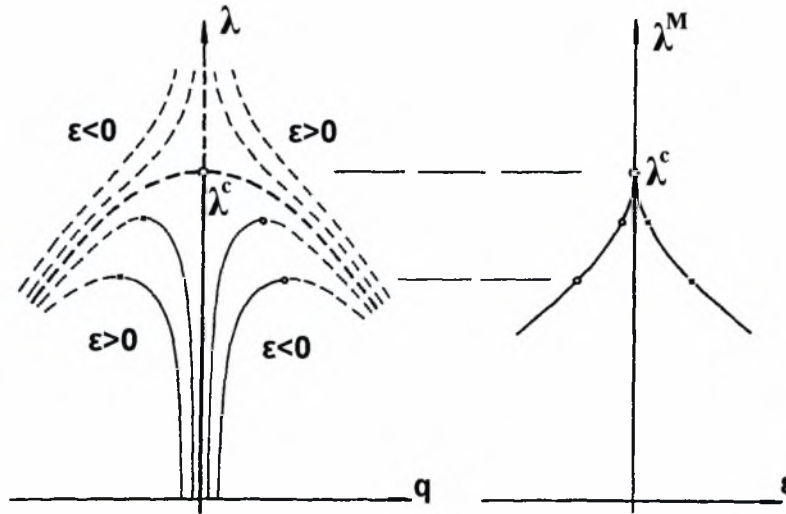


Σχήμα 2.28. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης, με τη μορφή των δρόμων ισορροπίας και το όριο ευστάθειας λόγω της παρουσίας συμπληρωματικών δρόμων.

Εδώ παρατηρούμε ότι για όλα τα ατελή συστήματα, οι φυσικοί δρόμοι ισορροπίας είναι όλοι μονοτονικά αύξοντες και ευσταθείς, οπότε με την φυσιολογικά αποδεκτή έννοια το συμμετρικό ευσταθές σημείο διακλάδωσης δεν επιδεικνύει ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες. Πλην όμως εμφανίζονται οριακά σημεία στους συμπληρωματικούς δρόμους ισορροπίας, με αποτέλεσμα το όριο ευστάθειας (stability boundary) της δεξιάς πλευράς του παραπάνω Σχήματος. Τοπικά πρόκειται περί αιχμής, για το λόγο αυτό, το φαινόμενο τούτο καλείται *καταστροφή τύπου αιχμής*.

Τέλος, θεωρούμε το συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης που φαίνεται στο Σχήμα 2.29. Πρόκειται περί της αντίθετης κατάστασης, με ευσταθείς δρόμους να αντικαθιστούν ασταθείς (και αντίστροφα). Τα οριακά σημεία εμφανίζονται στους φυσικούς δρόμους ισορροπίας των ατελών συστημάτων, και η αιχμή εμφανίζεται και εδώ (δεξί μέρος του Σχήματος) ανεστραμμένη, με

άπειρη κλίση για  $\varepsilon=0$ , γεγονός που υποδηλώνει σημαντική διαφοροποίηση της φέρουσας ικανότητας, τόσο για θετικά όσο και για αρνητικά  $\varepsilon$  αυτή τη φορά.



Σχήμα 2.29. Η επιρροή των αρχικών ατελειών στο συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης: δρόμοι ισορροπίας και ισχυρή εναισθησία τύπου αιχμής.

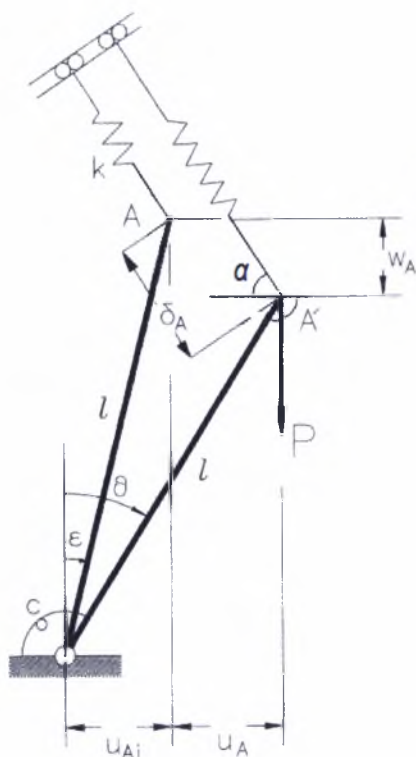


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ (ΜΟΝΤΕΛΟΥ)

### 3.1. Γεωμετρία - φόρτιση - χαρακτηριστικά

Το κατ' εξοχήν αντικείμενο του παρόντος πονήματος αποτελεί η ανάλυση ενός μοντέλου που προκύπτει εκ του συνδυασμού των μοντέλων που μελετήθηκαν από τους Zangaboni (1962) και Augusti (1964).

Θεωρούμε το μονοβάθμιο σύστημα, έχοντας γενικά μια αρχική γωνιακή ατέλεια  $\varepsilon$ , το οποίο αποτελείται από μια αβαρή ράβδο μήκους  $\ell$  μερικώς πακτωμένη στο ένα άκρο της (μέσω ενός γραμμικά περιστροφικού ελατηρίου με αντίστοιχη ακαμψία  $c$ ), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Το άλλο της άκρο, είναι συνδεδεμένο με ένα επίσης γραμμικά εκτατικό ελατήριο ακαμψίας  $k$ , το οποίο μπορεί ελεύθερα να κυλάει κατά μήκος των κεκλιμένων δρόμων.



Σχήμα 3.1. Γεωμετρία και σύμβαση προσήμων του εξεταζόμενου μονοβάθμιου συστήματος

Το σύστημα κάτω από ένα φορτίο  $P$ , κάθετα εφαρμοζόμενο στη κορυφή, παραμορφώνεται σε μια νέα θέση ισορροπίας ( $A'$ ), οπότε η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση συσχετιζόμενες με αυτή την παραμόρφωση είναι

$$u_A = \ell(\sin \theta - \sin \varepsilon) \quad (3.1 \alpha)$$

$$w_A = \ell(\cos \varepsilon - \cos \theta) \quad (3.1 \beta)$$

ενώ η αλλαγή του μήκους του εκτατικού ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$\delta_A = \ell \{ \sin(a - \varepsilon) - \sin(a - \theta) \} \quad (3.2 \alpha)$$

και η ροπή που αναπτύσσεται στο περιστροφικό ελατήριο είναι

$$M = c(\theta - \varepsilon) \quad (3.2 \beta)$$

### 3.2. Συνολική Δυναμική Ενέργεια και Εξισώσεις Ισορροπίας

Οι αντίστοιχες εκφράσεις των ενεργειακών σχέσεων που εμπεριέχονται είναι :

Συνάρτηση Συνολικού Δυναμικού

$$V_T = U + \Omega \quad (3.3)$$

όπου

$$U = \frac{1}{2} k \delta_A^2 + \frac{1}{2} M(\theta - \varepsilon) \quad (3.4)$$

$$\Omega = -P w_A \quad (3.5)$$

οπότε :

$$V_T = \frac{1}{2} k \ell^2 [\sin(a - \varepsilon) - \sin(a - \theta)]^2 + \frac{1}{2} c(\theta - \varepsilon)^2 - P \ell (\cos \varepsilon - \cos \theta) \quad (3.6)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες αδιάστατες παραμέτρους

$$\beta = \frac{c}{k \ell^2} \quad (3.7 \alpha)$$

$$\lambda = \frac{P}{k \ell} \quad (3.7 \beta)$$

λαμβάνουμε

$$\overline{V}_T = \frac{V_T}{k \ell^2} = \frac{1}{2} [\sin(a - \varepsilon) - \sin(a - \theta)]^2 + \frac{1}{2} \beta (\theta - \varepsilon)^2 - \lambda (\cos \varepsilon - \cos \theta) \quad (3.8)$$

από όπου παραγωγίζοντας ως προς τη μοναδική γενικευμένη συντεταγμένη  $\theta$  προκύπτει η εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{d\bar{V}_T}{d\vartheta} = [\sin(a - \varepsilon) - \sin(a - \vartheta)]\cos(a - \vartheta) + \beta(\vartheta - \varepsilon) - \lambda \sin \vartheta = 0 \quad (3.9)$$

ενώ η 2η μεταβολή του συνολικού δυναμικού στις θέσεις ισορροπίας προκύπτει ίση με

$$V_{\vartheta\vartheta} = \left[ \frac{d^2 \bar{V}_T}{d\vartheta^2} \right]_E = \left\{ \frac{\cos 2(a - \vartheta) + \sin(a - \varepsilon)\sin(a - \vartheta)}{+ \beta \frac{[\sin(a - \varepsilon) - \sin(a - \vartheta)]\cos(a - \vartheta) + \beta(\vartheta - \varepsilon)}{\tan \vartheta}} \right\} \quad (3.10)$$

Αν η  $V_{\vartheta\vartheta} > 0$  υπάρχει τοπικό ελάχιστο της  $V_T$  και η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, ενώ αν η  $V_{\vartheta\vartheta} < 0$  υπάρχει τοπικό μέγιστο της  $V_T$  και κατάσταση χαρακτηρίζεται ασταθής.

### 3.3. Παράμετροι ελέγχου

Πρώτη παράμετρος ελέγχου του συστήματός μας είναι το φορτίο  $\lambda$ , όπου  $\lambda = \frac{P}{k\ell}$ . Δεύτερη παράμετρος ελέγχου είναι η γωνία  $\alpha$ : που σχηματίζει το εκτατικό ελατήριο με την οριζόντια, ενώ τρίτη παράμετρος ελέγχου είναι η σταθερά  $\beta$  ίση με  $\beta = \frac{c}{k\ell^2}$ , όπου  $c$  είναι η ακαμψία του περιστροφικού ελατηρίου. Οι εν λόγω παράμετροι ελέγχου αναφέρονται στη «φυσική» λειτουργία του τέλειου συστήματος (είναι γεωμετρικές παράμετροι), ενώ η 4η παράμετρος - η αρχική γωνιακή ατέλεια  $\varepsilon$  - είναι αυτή που αναμένεται να διαδραματίσει πρωτεύοντα ρόλο στη μεταλυγισμική απόκριση του συστήματος.

### 3.4. Υπολογισμός κολοβωμένου συνολικού δυναμικού ( $\alpha, \beta, \varepsilon, \lambda \neq 0$ )

Με βάση το θεωρητικό υπόβαθρο του Κεφαλαίου Α' και χρήση συμβολικών μαθηματικών η όλη ανάλυση εστιάζεται στη **μελέτη δευτερευουσών διακλαδώσεων**, με αποτέλεσμα την συνεχή εναλλαγή της όλης μεταλυγισμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Αναλύεται, με χρήση των προσεγγιστικών μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας, οι οποίες προκύπτουν μέσω αναπτύγματος κατά Taylor του συνολικού δυναμικού. Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι συνθήκες εκείνες, για τις οποίες υφίστανται μετακρίσιμες διακλαδώσεις και κατόπιν αναλύεται το αντίστοιχο ατελές σύστημα, όπου αποκαλύπτεται μια πληθώρα νέων μη γραμμικών

φαινομένων, η ερμηνεία των οποίων γίνεται μέσω της Θεωρίας των Καταστροφών. Τούτο καθίσταται εφικτό μέσω *πλήρους ανάλυσης και κατάταξης* της συνάρτησης του *συνολικού δυναμικού* του προσομοιώματος, όπως αυτό προκύπτει από την προηγούμενη προσεγγιστική ανάλυση του (τέλειου και ατελούς) συστήματος.

Ξεκινώντας από την αρχική πλήρη συνάρτηση  $V(\text{germ})$ ,

$$V = \frac{1}{2}\beta(-\varepsilon + \theta)^2 - \lambda(\text{Cos}[\varepsilon] - \text{Cos}[\theta]) + \frac{1}{2}(\text{Sin}[\alpha - \varepsilon] - \text{Sin}[\alpha - \theta])^2 \quad (3.11)$$

και αναπτύσσοντας την κατά Taylor, μέχρι τους όρους 6ης τάξης, γίνεται κολόβωση της συνάρτησης συνολικού δυναμικού του συστήματος, και η προκύπτουσα αποτελεί πλήρη ανάπτυξη (versal unfolding) της  $V$ .

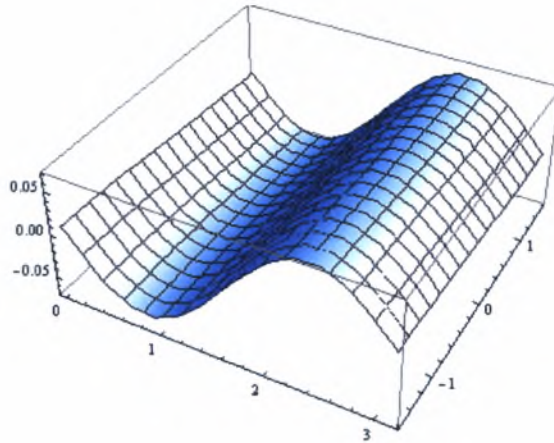
Μετά από αντικατάσταση των τριγωνομετρικών όρων μέσω συμβολικών μαθηματικών με προσεγγίσεις Pade, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση του κολοβωμένου συνολικού δυναμικού:

$$V_{\text{tot}} = A\theta^6 + H\theta^5 + B\theta^4 + \Gamma\theta^3 + \Delta\theta^2 + E\theta + Z \quad (3.12)$$

όπου οι τιμές των  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  δίνονται στο Παράρτημα της εργασίας και η παράμετρος  $H$ :

$$H = \frac{1}{240} \left( - \frac{32 \left( \alpha - \frac{2363\alpha^3}{18183} + \frac{12671\alpha^5}{4363920} \right) \left( 1 - \frac{3665\alpha^2}{7788} + \frac{711\alpha^4}{25960} - \frac{2923\alpha^6}{7850304} \right)}{\left( 1 + \frac{229\alpha^2}{7788} + \frac{\alpha^4}{2360} + \frac{127\alpha^6}{39251520} \right) \left( 1 + \frac{445\alpha^2}{12122} + \frac{601\alpha^4}{872784} + \frac{121\alpha^6}{16662240} \right)} + \right. \\ \left. \frac{2 \left( \alpha - \frac{2363\alpha^3}{18183} + \frac{12671\alpha^5}{4363920} \right) \left( 1 - \frac{3665\alpha^2}{7788} + \frac{711\alpha^4}{25960} - \frac{2923\alpha^6}{7850304} \right) \left( 1 - \frac{3665\varepsilon^2}{7788} + \frac{711\varepsilon^4}{25960} - \frac{2923\varepsilon^6}{7850304} \right)}{\left( 1 + \frac{229\alpha^2}{7788} + \frac{\alpha^4}{2360} + \frac{127\alpha^6}{39251520} \right) \left( 1 + \frac{445\alpha^2}{12122} + \frac{601\alpha^4}{872784} + \frac{121\alpha^6}{16662240} \right) \left( 1 + \frac{229\varepsilon^2}{7788} + \frac{\varepsilon^4}{2360} + \frac{127\varepsilon^6}{39251520} \right)} - \right. \\ \left. \frac{\varepsilon - \frac{2363\varepsilon^3}{18183} + \frac{12671\varepsilon^5}{4363920}}{1 + \frac{445\varepsilon^2}{12122} + \frac{601\varepsilon^4}{872784} + \frac{121\varepsilon^6}{16662240}} - \frac{\left( 1 - \frac{1718\alpha^2}{1947} + \frac{722\alpha^4}{3245} - \frac{7244\alpha^6}{613305} \right) \left( \varepsilon - \frac{2363\varepsilon^3}{18183} + \frac{12671\varepsilon^5}{4363920} \right)}{\left( 1 + \frac{229\alpha^2}{1947} + \frac{2\alpha^4}{295} + \frac{127\alpha^6}{613305} \right) \left( 1 + \frac{445\varepsilon^2}{12122} + \frac{601\varepsilon^4}{872784} + \frac{121\varepsilon^6}{16662240} \right)} + \right. \\ \left. \frac{\left( \alpha^2 - \frac{140\alpha^4}{649} + \frac{39\alpha^6}{3245} \right) \left( \varepsilon - \frac{2363\varepsilon^3}{18183} + \frac{12671\varepsilon^5}{4363920} \right)}{\left( 1 + \frac{229\alpha^2}{1947} + \frac{2\alpha^4}{295} + \frac{127\alpha^6}{613305} \right) \left( 1 + \frac{445\varepsilon^2}{12122} + \frac{601\varepsilon^4}{872784} + \frac{121\varepsilon^6}{16662240} \right)} \right)$$

Η εν λόγω παράμετρος, όπως απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.2. λαμβάνει πολύ μικρές τιμές και ως εκ τούτου δύναται ασφαλώς να αμεληθεί.



Σχήμα 3.2. Τρισδιάστατη απεικόνιση της επιφάνειας της παραμέτρου  $H$

Έτσι, η τελική έκφραση του κολοβωμένου συνολικού δυναμικού λαμβάνει τη μορφή  $V_{\text{tot}} = A\theta^6 + B\theta^4 + \Gamma\theta^3 + \Delta\theta^2 + E\theta + Z$ , που ισοδυναμεί με το συνολικό δυναμικό ενός συστήματος μιας ενεργής συντεταγμένης και τεσσάρων παραμέτρων ελέγχου, το οποίο παρουσιάζει καταστροφή τύπου πεταλούδας.

### 3.5. Το «πλήρως τέλειο» σύστημα ( $a=\beta=\varepsilon=0$ )

Στην περίπτωση που όλες οι ως άνω παράμετροι ισούνται με μηδέν, («πλήρως τέλειο» σύστημα), το σύστημα αποτελεί μεν μηχανισμό, πλην όμως η μελέτη ευστάθειας του επιβάλλεται έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση με τα αποτελέσματα τόσο του αντίστοιχου ακριβούς συστήματος, όσο και των διαταραχών αυτού.

Η συνάρτηση συνολικού δυναμικού απλουστεύεται ως εξής:

$$V = \theta^2 \left( \frac{1}{4} \left( 2 \left( \frac{3}{2} - \lambda \right) - 1 \right) \right) + \theta^6 \frac{32-2\lambda}{1440} + \theta^4 \left( \frac{1}{48} (2\lambda - 8) \right) \quad (3.13)$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση ισορροπίας γίνεται

$$V1 = 2\theta \left( \frac{1}{4} \left( 2 \left( \frac{3}{2} - \lambda \right) - 1 \right) \right) + 6\theta^5 \frac{32-2\lambda}{1440} + 4\theta^3 \left( \frac{1}{48} (2\lambda - 8) \right) \quad (3.14)$$

που αποτελεί την 1<sup>η</sup> παράγωγο της  $V$ , η οποία μηδενιζόμενη οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση του δρόμου ισορροπίας

$$\lambda = \frac{8(15-10\theta^2+2\theta^4)}{120-20\theta^2+\theta^4} \quad (3.15)$$

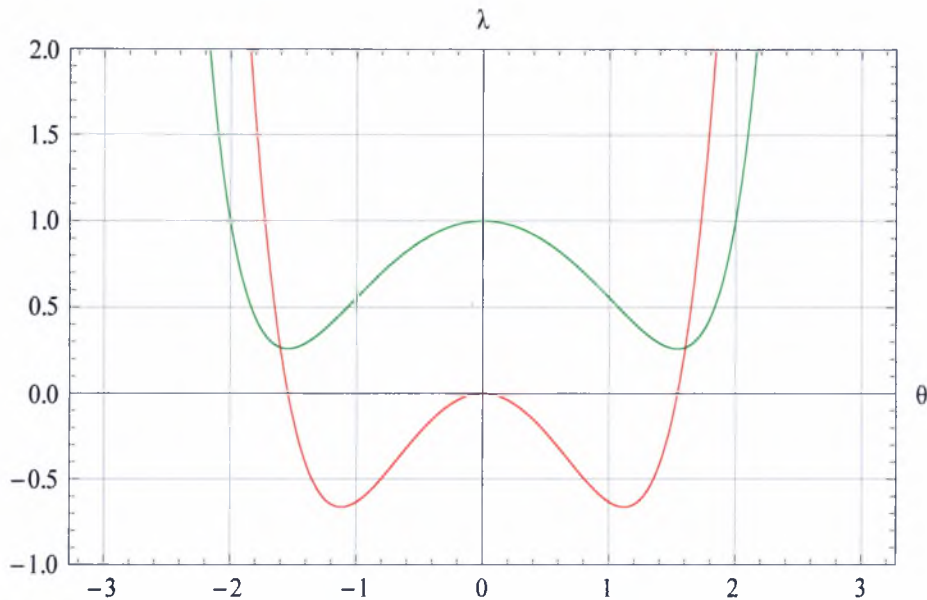
το όριο του οποίου για  $\theta \rightarrow 0$  ισούται με 1, που αποτελεί σημείο διακλάδωσης. Επίσης, η δεύτερη μεταβολή του συνολικού δυναμικού στις θέσεις ισορροπίας, από το πρόσημο της οποίας προκύπτει η ευστάθεια ή μη του σχετικού δρόμου έχει ως εξής:

$$\left[ \frac{d^2V}{d\theta^2} \right]_{\lambda=\lambda_E} = V_{11} =$$

$$\frac{1}{48}\theta^4 \left( 32 - \frac{16(15-10\theta^2+2\theta^4)}{120-20\theta^2+\theta^4} \right) + \frac{1}{4}\theta^2 \left( -8 + \frac{16(15-10\theta^2+2\theta^4)}{120-20\theta^2+\theta^4} \right) + \frac{1}{2} \left( -1 + \right.$$

$$\left. 2 \left( \frac{3}{2} - \frac{8(15-10\theta^2+2\theta^4)}{120-20\theta^2+\theta^4} \right) \right) \quad (3.16)$$

Ο ως άνω δρόμος ισορροπίας, συνοδευόμενος από την συνάρτηση της 2ης μεταβολής απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3. Δρόμος ισορροπίας (πράσινο) και 2<sup>η</sup> μεταβολή του συνολικού δυναμικού (κόκκινο) για το «πλήρως τέλει» σύστημα ( $a = \beta = \varepsilon = 0$ ).

Εύκολα διαπιστώνεται ότι το σύστημα παρουσιάζει ένα συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης C, με  $\lambda_c = 1$ , καθώς επίσης και δύο (2) οριακά σημεία S, S' με  $\lambda_{S,S'} = 0.259148$ , που εμφανίζονται για  $\theta = 1.5416$  και  $\theta = -1.5416$  αντίστοιχα. Προφανώς, το σύνολο των σημείων ισορροπίας χαρακτηρίζεται από αστάθεια, όπως αναμενόταν.

### 3.6. Χρήση δύο μη μηδενικών παραμέτρων ελέγχου

#### 3.6.1. Το «απλούστερο» ατελές σύστημα ( $a = \beta = 0, \varepsilon \neq 0$ )

Η συγκεκριμένη περίπτωση, αποτελεί την απλούστερη δυνατή διαταραχή του προηγούμενου συστήματος μέσω της εισαγωγής της αρχικής γωνιακής ατέλειας  $\varepsilon$ . Η συνάρτηση συνολικού δυναμικού παίρνει την μορφή:



V =

$$\begin{aligned}
 & \theta \left( -\frac{42\varepsilon(12671\varepsilon^4 - 567120\varepsilon^2 + 4363920)}{1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640} \right) + \\
 & \theta^3 \frac{7\varepsilon(12671\varepsilon^4 - 567120\varepsilon^2 + 4363920)}{1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640} + \\
 & \theta^2 \left( \frac{1}{4} \left( 2(613305 \left( \frac{32}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \lambda) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} \right) \right) + \\
 & \theta^6 \frac{19625760 \left( \frac{2}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - 2\lambda}{1440} + \\
 & \theta^4 \left( \frac{1}{48} \left( 4906440 \left( -\frac{8}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - \frac{1}{613305} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + 2\lambda \right) \right) + \\
 & \frac{1}{4} \left( \frac{1512(39\varepsilon^4 - 2800\varepsilon^2 + 51920)\varepsilon^2\lambda}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - \right. \\
 & \frac{2(14615\varepsilon^6 - 1075032\varepsilon^4 + 18471600\varepsilon^2 - 39251520)}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \\
 & \frac{29230\varepsilon^6 - 2150064\varepsilon^4 + 36943200\varepsilon^2 - 78503040}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - \\
 & \frac{(-14615\varepsilon^6 + 1075032\varepsilon^4 - 18471600\varepsilon^2 + 39251520)^2}{(127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520)^2} + \\
 & \left. \frac{1764(12671\varepsilon^5 - 567120\varepsilon^3 + 4363920\varepsilon)^2}{(1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640)^2} + 1 \right) \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Η πρώτη μεταβολή του V ισούται με:

V1 =

$$\begin{aligned}
 & -\frac{42\varepsilon(12671\varepsilon^4 - 567120\varepsilon^2 + 4363920)}{1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640} + \\
 & 3\theta^2 \frac{7\varepsilon(12671\varepsilon^4 - 567120\varepsilon^2 + 4363920)}{1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640} + \\
 & 2\theta \left( \frac{1}{4} \left( 2(613305 \left( \frac{32}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \lambda) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} \right) \right) + \\
 & 6\theta^5 \frac{1}{1440} \left( 19625760 \left( \frac{2}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - 2\lambda \right) + \\
 & 4\theta^3 \left( \frac{1}{48} \left( 4906440 \left( -\frac{8}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - \frac{1}{613305} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + 2\lambda \right) \right) \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

με την έκφραση του δρόμου ισορροπίας να είναι η ακόλουθη

$L =$

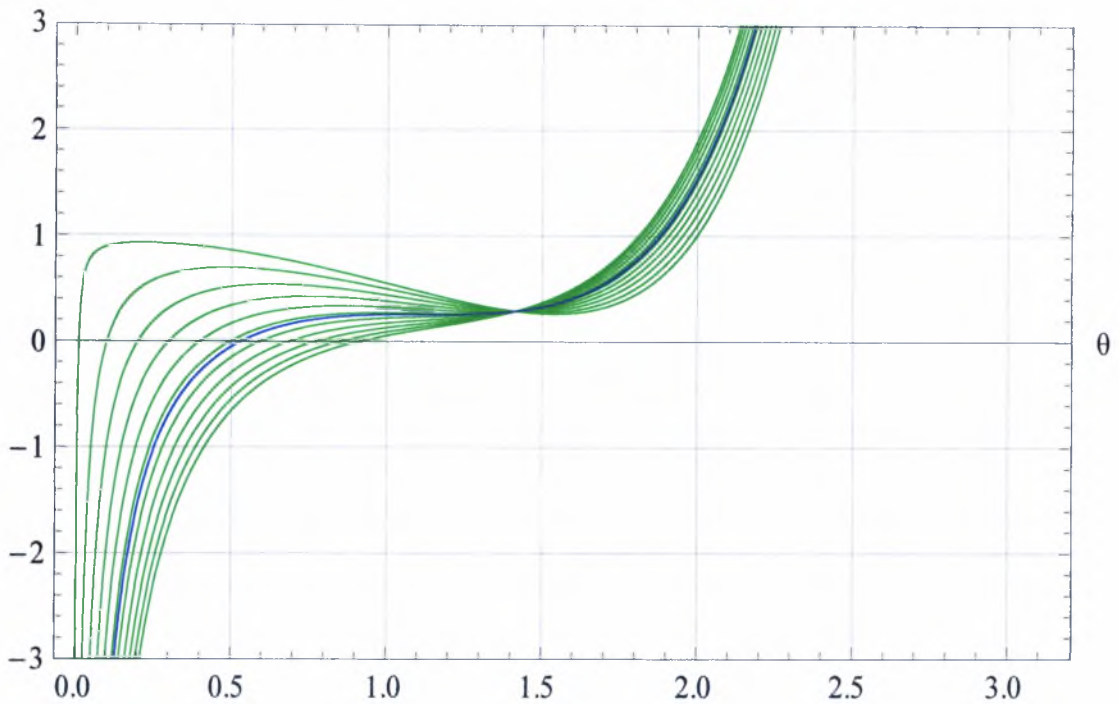
$$\begin{aligned}
 & -\theta + \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} \left( \frac{42\varepsilon(4363920 - 567120\varepsilon^2 + 12671\varepsilon^4)}{183284640 + 6728400\varepsilon^2 + 126210\varepsilon^4 + 1331\varepsilon^6} + \right. \\
 & \frac{19625760\theta}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} - 613305 \left( \frac{1}{613305} + \right. \\
 & \left. \frac{32}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} \right) \theta - \frac{21\varepsilon(4363920 - 567120\varepsilon^2 + 12671\varepsilon^4)\theta^2}{183284640 + 6728400\varepsilon^2 + 126210\varepsilon^4 + 1331\varepsilon^6} - \\
 & \frac{3270960\theta^3}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} - 408870 \left( -\frac{1}{613305} - \right. \\
 & \left. \frac{8}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} \right) \theta^3 + \frac{163548\theta^5}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} - \\
 & \left. 81774 \left( \frac{1}{613305} + \frac{2}{39251520 + 1154160\varepsilon^2 + 16632\varepsilon^4 + 127\varepsilon^6} \right) \theta^5 \right) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

ενώ η 2η μεταβολή του  $V$  για τα σημεία ισορροπίας ισούται πλέον με:

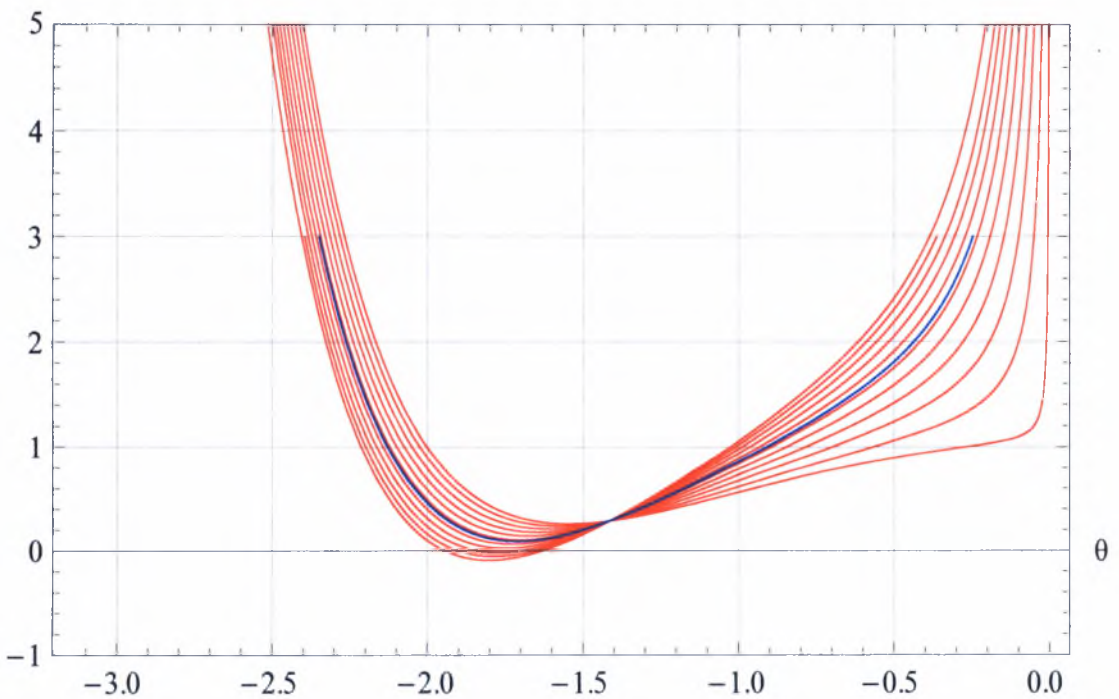
$V_{11} =$

$$\begin{aligned}
 & 6\theta \frac{7\varepsilon(12671\varepsilon^4 - 567120\varepsilon^2 + 4363920)}{1331\varepsilon^6 + 126210\varepsilon^4 + 6728400\varepsilon^2 + 183284640} + \\
 & 2 \left( \frac{1}{4} \left( 2 \left( 613305 \left( \frac{32}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \lambda \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} \right) \right) + \\
 & 30\theta^4 \frac{19625760 \left( \frac{2}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + \frac{1}{613305} \right) - \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - 2\lambda}{1440} + \\
 & 12\theta^2 \left( \frac{1}{48} \left( 4906440 \left( -\frac{8}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} - \frac{1}{613305} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{39251520}{127\varepsilon^6 + 16632\varepsilon^4 + 1154160\varepsilon^2 + 39251520} + 2\lambda \right) \right) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

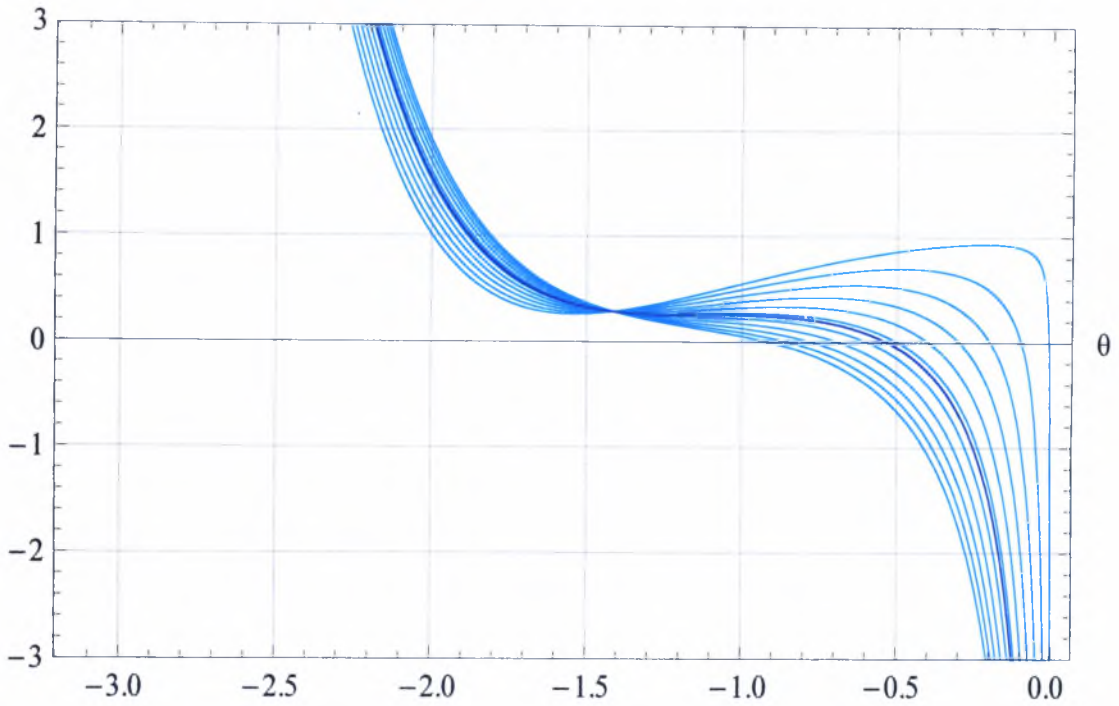
Για διάφορες τιμές της γωνιακής ατέλειας  $\varepsilon$ , απεικονίζονται οι δρόμοι ισορροπίας στα κατωτέρω σχήματα:



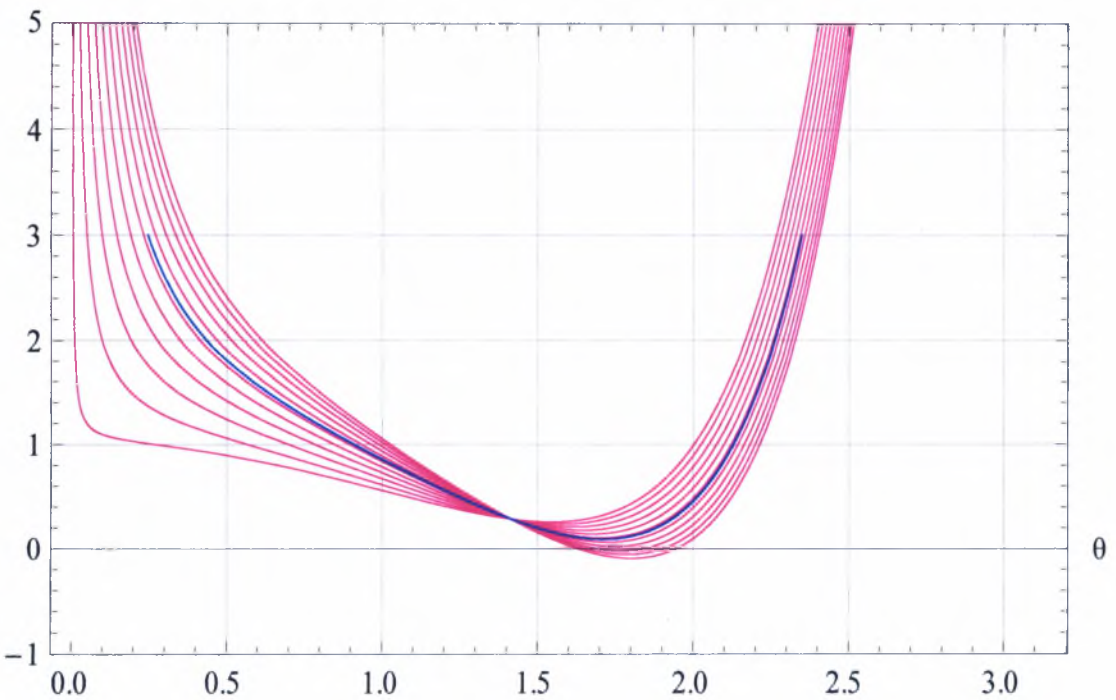
Σχήμα 3.4. Δρόμοι ισορροπίας (κύριοι)  $(\theta, \lambda)$  για θετικές τιμές της ατέλειας  $\varepsilon$  και για  $0 < \theta < \pi$  (Με μπλε χρώμα απεικονίζεται ο δρόμος ισορροπίας με σημείο καμπής).



Σχήμα 3.5. Δρόμοι ισορροπίας (συμπληρωματικοί)  $(\theta, \lambda)$  για θετικές τιμές της ατέλειας  $\varepsilon$  και για  $-\pi < \theta < 0$  (Με μπλε χρώμα απεικονίζεται ο δρόμος ισορροπίας με σημείο καμπής).



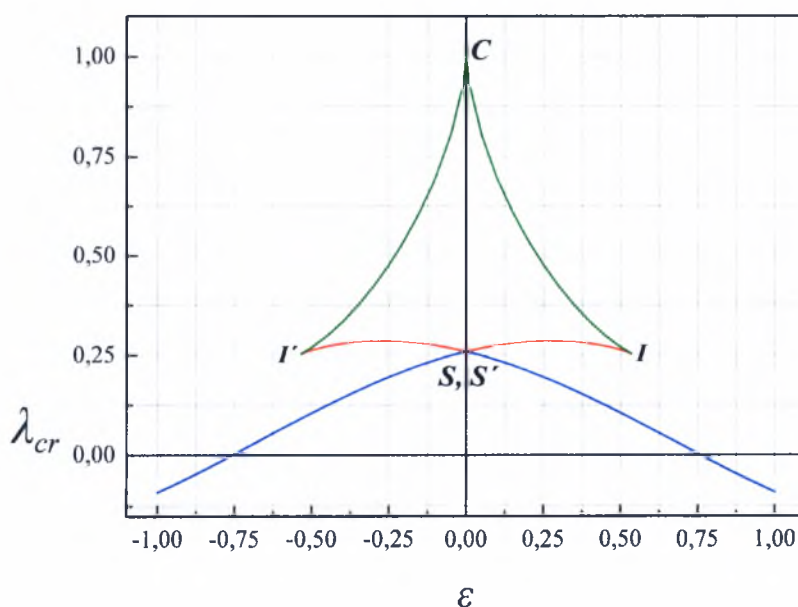
Σχήμα 3.6. Δρόμοι ισορροπίας (κύριοι)  $(\theta, \lambda)$  για αρνητικές τιμές της ατέλειας  $\varepsilon$  και για  $-\pi < \theta < 0$   
(Με μπλε χρώμα απεικονίζεται ο δρόμος ισορροπίας με σημείο καμπής).



Σχήμα 3.7. Δρόμοι ισορροπίας (συμπληρωματικοί)  $(\theta, \lambda)$  για αρνητικές τιμές της ατέλειας  $\varepsilon$  και για  $0 < \theta < \pi$  (Με μπλε χρώμα απεικονίζεται ο δρόμος ισορροπίας με σημείο καμπής).

Λόγω συμμετρίας των κύριων και συμπληρωματικών δρόμων σχολιάζεται μόνο η περίπτωση θετικής αρχικής ατέλειας. Για  $\varepsilon > 0$  συνεπώς, η διαταραχή οδηγεί σε διακλαδώσεις διάσπασης της συμμετρίας του αρχικού συστήματος (symmetry breaking bifurcations) και την εμφάνιση καταρχήν δύο οριακών σημείων στο κύριο δρόμο και ενός οριακού σημείου στο συμπληρωματικό. Όσον αφορά τον κύριο δρόμο, το οριακό σημείο που εμφανίζεται για μεγαλύτερο φορτίο αποτελεί διαταραχή του  $C$ , ενώ το άλλο διαταραχή του  $S$  (όπου  $C$  και  $S$  τα κρίσιμα σημεία του πλήρως τελείου συστήματος). Αντίστοιχα το οριακό σημείο του συμπληρωματικού δρόμου αποτελεί διαταραχή του  $S'$ . Το εν λόγω σημείο υφίσταται για κάθε τιμή της αρχικής ατέλειας, σε αντίθεση με τα οριακά σημεία του κύριου δρόμου, τα οποία πλησιάζουν μεταξύ τους καθώς το  $\varepsilon$  αυξάνεται και εντέλει εξαφανίζονται μέσω σημείου καμπής του δρόμου για κάποια κρίσιμη τιμή της ατέλειας.

Οι ανωτέρω ποιοτικές διαπιστώσεις απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 3.8 των διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος. Η μορφή του διαγράμματος αυτού χαρακτηρίζεται από καταστροφές αιχμής και λοξής αιχμής, οι οποίες αποτελούν υποπεριπτώσεις της καταστροφής τύπου χελιδονοουράς.



Σχήμα 3.8. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος με  $\alpha = \beta = 0$



### 3.6.2. Τέλειο σύστημα με οριζόντιο ελατήριο ( $\alpha=\varepsilon=0$ , $\beta\neq 0$ )

Στην περίπτωση αυτή το εκτατικό ελατήριο στην κορυφή βρίσκεται σε οριζόντια θέση, ενώ η παράμετρος που συνδέει τις δυσκαμψίες αμφοτέρων των ελατηρίων  $\beta$  μεταβάλλεται. Λόγω δε της φύσης της παραμέτρου αυτής, μικρές τιμές της υποδηλώνουν είτε ασθενές στροφικό ελατήριο είτε ισχυρό εκτατικό, ενώ το αντίθετο ισχύει για μεγάλες σχετικές τιμές. Κατά συνέπεια, οι εκφράσεις του συνολικού δυναμικού, των δρόμων ισορροπίας και της 2ης μεταβολής λαμβάνουν τη μορφή:

$$V = \left(\frac{1}{4}(2(\beta - \lambda + \frac{3}{2}) - 1)\right) + \theta^6 \frac{32-2\lambda}{1440} + \theta^4 \left(\frac{1}{48}(2\lambda - 8)\right) \quad (3.21)$$

$$V1 = 2\theta \left(\frac{1}{4}(2(\beta - \lambda + \frac{3}{2}) - 1)\right) + 6\theta^5 \frac{32-2\lambda}{1440} + 4\theta^3 \left(\frac{1}{48}(2\lambda - 8)\right) \quad (3.22)$$

$$\lambda_E = \frac{8(15+15\beta-10\theta^2+2\theta^4)}{120-20\theta^2+\theta^4} \quad (3.23)$$

$$V11 = 2\left(\frac{1}{4}(2(\beta - \lambda + \frac{3}{2}) - 1)\right) + 30\theta^4 \frac{32-2\lambda}{1440} + 12\theta^2 \left(\frac{1}{48}(2\lambda - 8)\right) \quad (3.24)$$

Σαν μια πρώτη παρατήρηση, μπορεί κανείς να επισημάνει ότι η παράμετρος  $\beta$  δεν υπεισέρχεται σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οπότε πιθανότατα θα υφίσταται δυνατότητα αναλυτικών υπολογισμών όλων των κρίσιμων σημείων του συστήματος. Εν συνεχεία εκ της (3.23) διαπιστώνεται άμεσα ότι οι δρόμοι ισορροπίας διαθέτουν ένα σημείο διακλάδωσης για φορτίο ίσο με

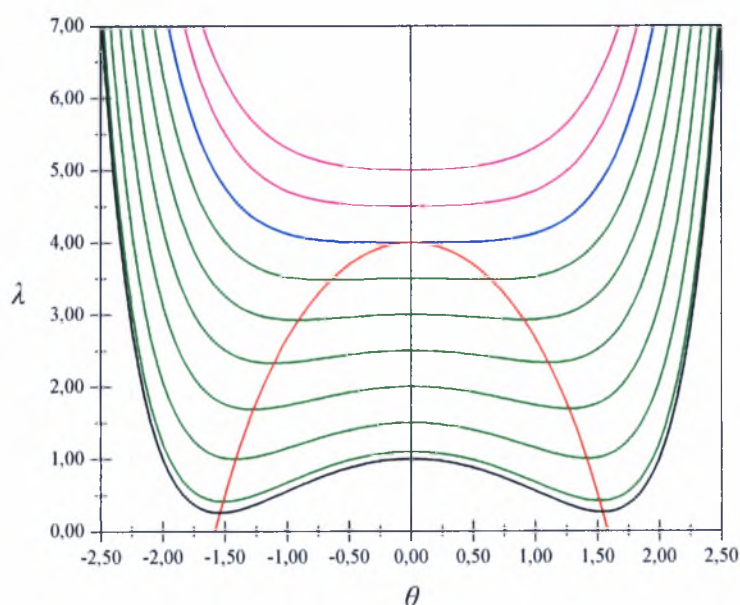
$$\lambda_c = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda_E = 1 + \beta \quad (3.25)$$

Η ύπαρξη και άλλων κρίσιμων σημείων εξετάζεται μέσω του μηδενισμού της (3.24) στις θέσεις ισορροπίας (δηλαδή για  $\lambda=\lambda_E$ ) και αναζήτησης λύσεων για  $\theta\neq 0$ . Επιλύοντας την  $V11|_E = 0$  ως προς  $\beta$  βρίσκεται ότι  $\beta_{cr} = \frac{-30+15\theta^2-\theta^4}{-10+\theta^2}$  οπότε ο γεωμετρικός τόπος όλων των κρίσιμων σημείων δίδεται από την αναλυτική συνάρτηση

$$\lambda_{cr} = \frac{8(15-10\theta^2+2\theta^4+\frac{15(-30+15\theta^2-\theta^4)}{-10+\theta^2})}{120-20\theta^2+\theta^4} \quad (3.26)$$

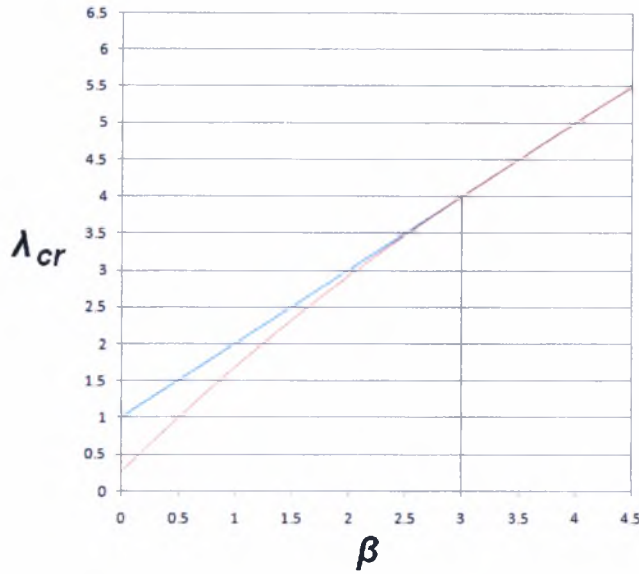


η οποία για  $\theta=0$  δίδει  $\lambda=4$ . Αυτό σε συνδυασμό με την (3.25) υποδηλώνει ότι για  $\beta=3$  τα υφιστάμενα οριακά σημεία και το διακλαδικό ταυτίζονται. Τούτο φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 3.9, όπου έχουν χαραχθεί οι δρόμοι ισορροπίας και ο γεωμετρικός τόπος των κρίσιμων σημείων του συστήματος για διάφορες τιμές του  $\beta$ . Προκύπτει ότι για  $\beta<3$  το σύστημα παρουσιάζει δύο συμμετρικά οριακά σημεία και ένα συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης, τα οποία εκφυλίζονται σε συμμετρικό ευσταθές Σ.Δ για  $\beta=3$ . Για μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$  εμφανίζεται μόνο ένα τέτοιου είδους Σ.Δ στους δρόμους ισορροπίας του συστήματος. Σημειωτέον ότι τα ανωτέρω ευρεθέντα είναι ακριβώς ταυτόσημα με αυτά που ισχύουν για το αρχικό σύστημα πριν την κολόβωση του δυναμικού.



Σχήμα 3.9. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $a=\varepsilon=0$  για διάφορες τιμές του  $\beta$  και γεωμετρικός τόπος κρίσιμων σημείων.

Θεωρώντας στη συνέχεια την παρουσία του  $\beta$  σαν «ήπια» διαταραχή του «πλήρως τέλειου» συστήματος, προκύπτει το σχετικό διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων του Σχήματος 3.10, όπου φαίνεται εποπτικά ο εκφυλισμός των οριακών σημείων που αναφέρθηκε προηγουμένως, με την κόκκινη γραμμή του διαγράμματος να αναφέρεται στα οριακά σημεία και την μπλε στα σημεία διακλάδωσης.



Σχήμα 3.10 Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος με  $a=\varepsilon=0$ .

### 3.6.3. Τέλειο σύστημα με μεταβλητή γωνιά εκτατικού ελατηρίου και άρθρωση στη βάση ( $\beta=\varepsilon=0$ , $a\neq 0$ )

Η μεταβλητή θέση του εκτατικού ελατηρίου κορυφής κυμαίνεται μεταξύ  $0 < a < \pi$ , για προφανείς λόγους συμβατότητας γεωμετρικής φύσεως, ενώ  $\beta=0$  ισοδυναμεί με εξαφάνιση του στροφικού ελατηρίου βάσης παρά με απειρισμό της δυσκαμψίας του ελατηρίου κορυφής, λόγω απώλειας φυσικής σημασίας. Στη τρέχουσα περίπτωση θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 V = & \theta^3 \left( -\frac{21\alpha(12671\alpha^4 - 567120\alpha^2 + 4363920)(14615\alpha^6 - 1075032\alpha^4 + 18471600\alpha^2 - 39251520)}{(127\alpha^6 + 16632\alpha^4 + 1154160\alpha^2 + 39251520)(1331\alpha^6 + 126210\alpha^4 + 6728400\alpha^2 + 183284640)} \right) + \\
 & \theta^2 \left( \frac{1}{4} \left( 2(613305 \left( \frac{1}{127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305} + \frac{1}{1226610} \right) - \lambda) - \right. \right. \\
 & \left. \frac{4(54791635\alpha^4 - 983848383\alpha^2 + 4555035450)\alpha^2}{127(127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305)} + \right. \\
 & \left. \frac{6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2 - 49383054)\alpha^2 + 18073523475) - 505504380150}{824230(127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305)} \right) + \\
 & \theta^6 \frac{1}{1440} \left( -\frac{2(79(1739555\alpha^2 - 31388364)\alpha^2 + 11309345775)\alpha^2}{127(127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305)} + 19625760 \left( \frac{1}{127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305} + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{19625760} \right) + \frac{6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2 - 49383054)\alpha^2 + 18073523475) - 505504380150}{824230(127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305)} - 2\lambda \Big) + \\
 & \theta^4 \left( \frac{1}{48} \left( 4906440 \left( -\frac{1}{127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305} - \frac{1}{4906440} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \frac{2}{127} \left( \frac{79(1457615\alpha^2 - 26203716)\alpha^2 + 9549925875}{127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{505504380150 - 6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2 - 49383054)\alpha^2 + 18073523475)}{12980(127\alpha^6 + 4158\alpha^4 + 72135\alpha^2 + 613305)} \right) + 2\lambda \right) \Big) \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda = & \frac{1}{-\theta + \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120}} \left( \frac{2\alpha^2(4555035450 - 983848383\alpha^2 + 54791635\alpha^4)\theta}{127(613305 + 72135\alpha^2 + 4158\alpha^4 + 127\alpha^6)} - 613305 \left( \frac{1}{1226610} + \right. \right. \\
 & \left. \frac{613305 + 72135\alpha^2 + 4158\alpha^4 + 127\alpha^6}{1648460(613305 + 72135\alpha^2 + 4158\alpha^4 + 127\alpha^6)} \right) \theta - \\
 & \left. \frac{(-505504380150 + 6490\alpha^2(18073523475 + 79\alpha^2(-49383054 + 2750765\alpha^2)))\theta}{1648460(613305 + 72135\alpha^2 + 4158\alpha^4 + 127\alpha^6)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{63\alpha(4363920-567120\alpha^2+12671\alpha^4)(-39251520+18471600\alpha^2-1075032\alpha^4+14615\alpha^6)\theta^2}{(39251520+1154160\alpha^2+16632\alpha^4+127\alpha^6)(183284640+6728400\alpha^2+126210\alpha^4+1331\alpha^6)} - \\
 & 408870\left(-\frac{1}{4906440} - \frac{1}{613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6}\right)\theta^3 - \\
 & \frac{1}{762}\left(\frac{\alpha^2(9549925875+79\alpha^2(-26203716+1457615\alpha^2))}{613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6} + \right. \\
 & \left. \frac{505504380150-6490\alpha^2(18073523475+79\alpha^2(-49383054+2750765\alpha^2))}{12980(613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6)}\right)\theta^3 + \\
 & \frac{\alpha^2(11309345775+79\alpha^2(-31388364+1739555\alpha^2))\theta^5}{15240(613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6)} - 81774\left(\frac{1}{19625760} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6}\right)\theta^5 - \\
 & \left.\frac{(-505504380150+6490\alpha^2(18073523475+79\alpha^2(-49383054+2750765\alpha^2)))\theta^5}{197815200(613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6)}\right) \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\lambda=\lambda_E} = \\
 & V11 = \\
 & 6\theta\left(-\frac{21\alpha(12671\alpha^4-567120\alpha^2+4363920)(14615\alpha^6-1075032\alpha^4+18471600\alpha^2-39251520)}{(127\alpha^6+16632\alpha^4+1154160\alpha^2+39251520)(1331\alpha^6+126210\alpha^4+6728400\alpha^2+183284640)}\right) + \\
 & 2\left(\frac{1}{4}\left(2(613305\left(\frac{1}{127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305} + \frac{1}{1226610}\right) - \lambda) - \right. \right. \\
 & \left. \frac{4(54791635\alpha^4-983848383\alpha^2+4555035450)\alpha^2}{127(127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305)} + \right. \\
 & \left. \frac{6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2-49383054)\alpha^2+18073523475)-505504380150}{824230(127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305)}\right) + \\
 & 30\theta^4\frac{1}{1440}\left(-\frac{2(79(1739555\alpha^2-31388364)\alpha^2+11309345775)\alpha^2}{127(127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305)} + \right. \\
 & 19625760\left(\frac{1}{127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305} + \frac{1}{19625760}\right) + \\
 & \left.\frac{6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2-49383054)\alpha^2+18073523475)-505504380150}{824230(127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305)} - 2\lambda\right) + \\
 & 12\theta^2\left(\frac{1}{48}\left(4906440\left(-\frac{1}{127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305} - \frac{1}{4906440}\right) + \right. \right. \\
 & \left. \frac{2}{127}\left(\frac{79(1457615\alpha^2-26203716)\alpha^2+9549925875}{127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305}\right) + \right. \\
 & \left. \left.\frac{505504380150-6490\alpha^2(79(2750765\alpha^2-49383054)\alpha^2+18073523475)}{12980(127\alpha^6+4158\alpha^4+72135\alpha^2+613305)}\right) + 2\lambda\right) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Καθόσον το σύστημα παραμένει χωρίς αρχική ατέλεια, θα παρουσιάζει σίγουρα ένα σημείο διακλάδωσης, το οποίο θα αντιστοιχεί σε φορτίο που θα προέλθει από το όριο της  $\lambda_E$  για  $\theta \rightarrow 0$ , γεγονός που οδηγεί σε

$$\lambda_c = \frac{613305-541170\alpha^2+136458\alpha^4-7244\alpha^6}{613305+72135\alpha^2+4158\alpha^4+127\alpha^6} \quad (3.30)$$

Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, δεν υφίσταται η δυνατότητα υπολογισμού αναλυτικής έκφρασης για τυχόν οριακά σημεία, λόγω πολυπλοκότητας. Με σκοπό πάντως την μελέτη των δρόμων ισορροπίας επιλέγονται δύο χαρακτηριστικές τιμές του  $\alpha$  ( $\alpha=0.30<\pi/2$  και  $\alpha=2.4>\pi/2$ ) και χαράσσονται οι σχετικές τυπικές καμπύλες, οι οποίες παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 3.11. Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα εμφανίζει ένα ασύμμετρο διακλαδικό σημείο C και ένα οριακό σημείο, που απεικονίζονται χαρακτηριστικά στο Σχήμα αυτό.

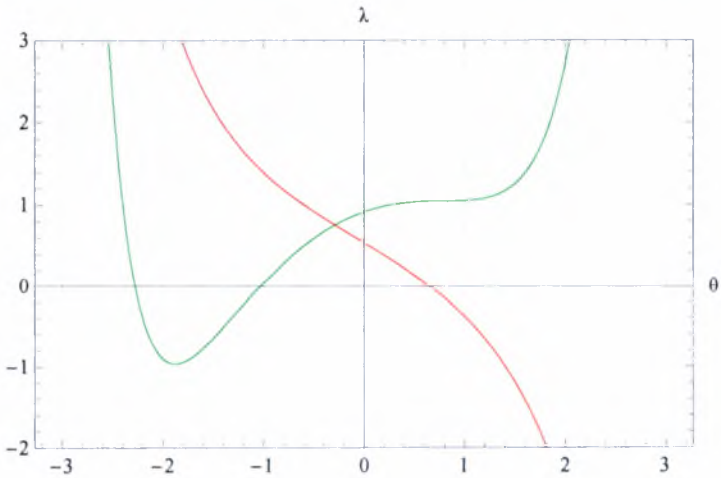
$\alpha=0.3$

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	0.912668
S <sub>1</sub>	-1.87803	-0.962796

$\alpha=2.4$

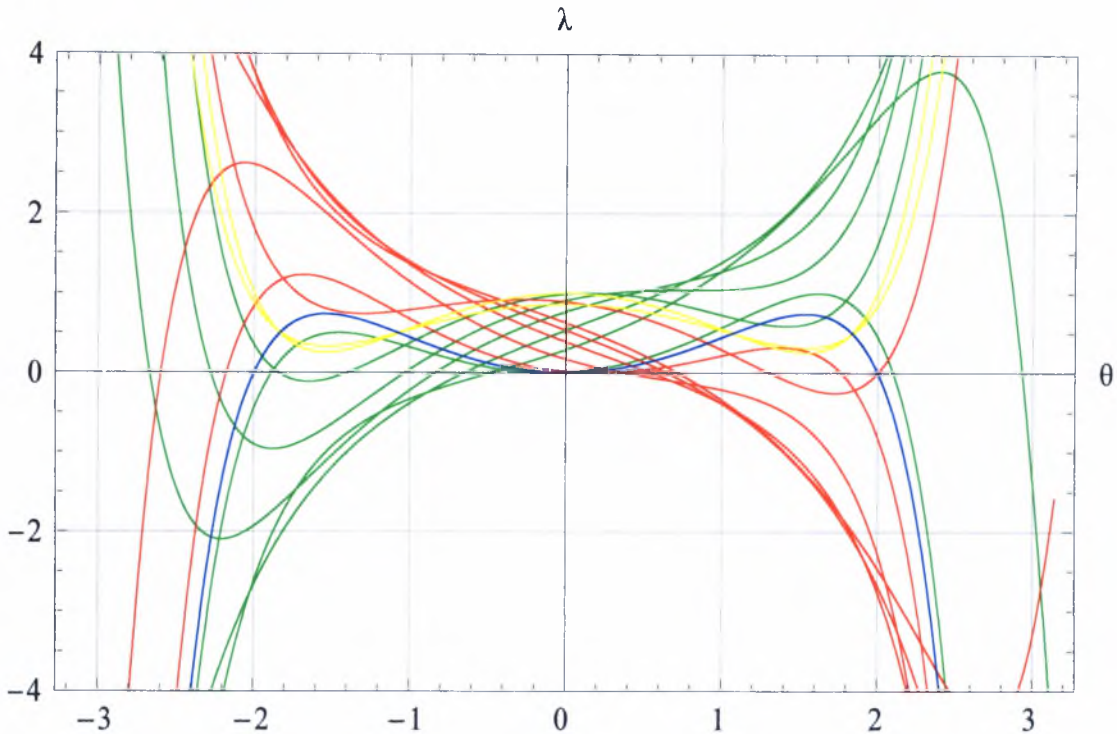
Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	0.536651
S <sub>1</sub>	3.14032	-10.3527

Η πράσινη γραμμή αντιστοιχεί σε  $\alpha=0.3$  και η κόκκινη σε  $\alpha=2.4$



Σχήμα 3.11. Τυπικοί δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=\epsilon=0$  και δύο χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .

Πέραν των ανωτέρω ενδεικτικών περιπτώσεων υπολογίζονται οι δρόμοι ισορροπίας του συστήματος για μια μεγάλη γκάμα τιμών του  $\alpha$  καθώς και τα στοιχεία των κρίσιμων σημείων απεικονιζόμενα στο Σχήμα 3.12 (μόνο οι δρόμοι).



Σχήμα 3.12. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=\varepsilon=0$  για διάφορες τιμές του  $\alpha$ .

Παρατηρούμε ότι παρουσιάζονται δυο οριακά σημεία και ένα σημείο διακλάδωσης για τιμές της γωνίας  $\alpha$  όπως συνέβαινε και στο πλήρως τέλει σύστημα, κοντά στο 0, στο  $\frac{\pi}{2}$ , και στο  $\pi$ . Στις υπόλοιπες θέσεις όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί, συναντούμε ένα μόνο οριακό σημείο και ένα σημείο διακλάδωσης. Ξεκινώντας για μικρές τιμές της γωνίας  $\alpha$  και καθώς την αυξάνουμε, το σημείο διακλάδωσης μετατοπίζεται από τη θέση που έχει για  $\alpha=\beta=\varepsilon=0$  (πλήρως τέλει σύστημα) προς τα κάτω για να πάρει τιμή φορτίου ίση με μηδέν για γωνία  $\alpha$  κοντά στο  $\frac{\pi}{2}$ . Ομοίως, ξεκινώντας από μεγάλες τιμές της γωνίας  $\alpha$  κοντά στο  $\pi$  και πηγαίνοντας προς το  $\frac{\pi}{2}$ , παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά για το σημείο διακλάδωσης. Η εξίσωση που διέπει όλα τα σημεία διακλάδωσης για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$  προκύπτει από την εξίσωση ισορροπίας για  $\theta \rightarrow 0$  και είναι  $\lambda c = \frac{613305 - 541170\alpha^2 + 136458\alpha^4 - 7244\alpha^6}{613305 + 72135\alpha^2 + 4158\alpha^4 + 127\alpha^6}$  από όπου διαπιστώνεται και η παραπάνω συμπεριφορά τους. Η συμπεριφορά αυτή των σημείων διακλάδωσης φαίνεται και στο διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος που ακολουθεί μαζί με την συμπεριφορά και των οριακών του σημείων.

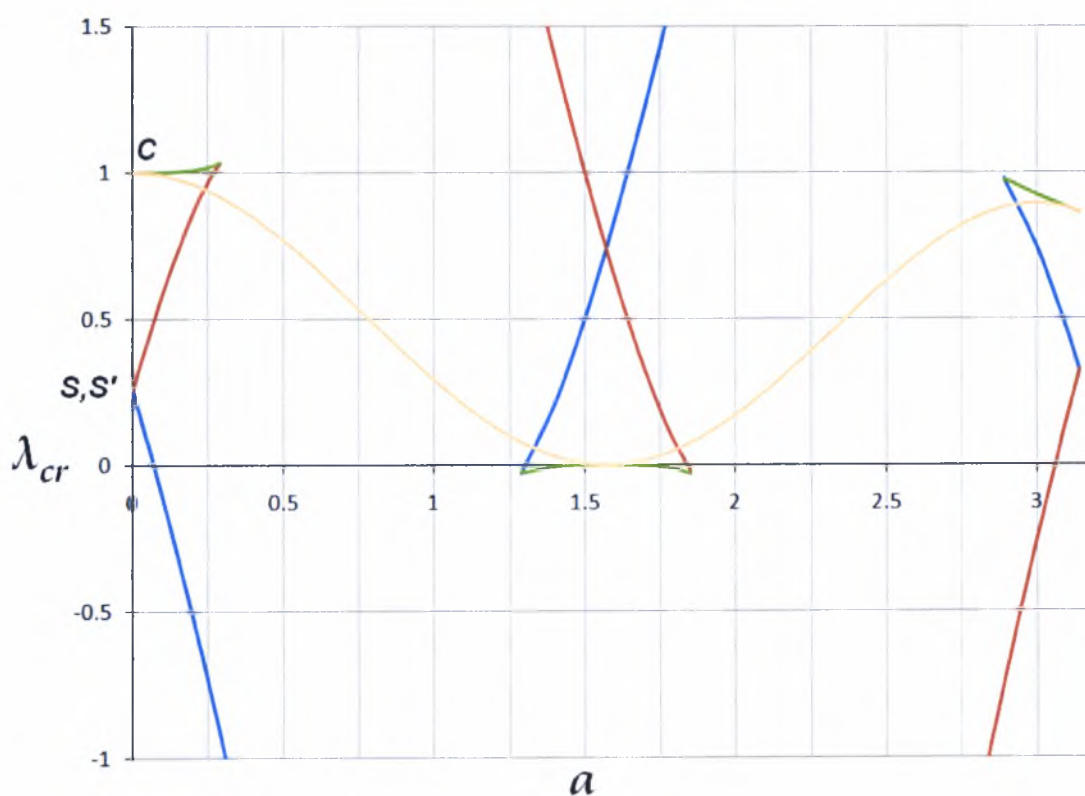


Ν. Κέφου  
Μεταπτυχιακή εργασία

<b>α</b>	<b>S1</b>	<b>S2</b>	<b>S3</b>	<b>C</b>
0	0.259148	0.259148	1	1
0.1	-0.115109	0.591014	1.00147	0.990033
0.2	-0.5223	0.863903	1.00907	0.96053
0.25	-0.737757	0.969763	1.01916	0.938791
0.27	-0.826482	1.00432	1.02584	0.928854
0.29	-0.916891	1.03275	1.03552	0.918231
0.3	-0.962796			0.912668
0.4	-1.45876			0.848353
0.5	-2.09681			0.770151
0.6	-3.23146			0.681179
0.7	-6.66959			0.584984
0.75				0.535369
0.8				0.4854
0.9		6.17697		0.386399
1		3.79736		0.291926
1.1		2.88473		0.205749
1.2		2.30519		0.131302
1.25		2.05995		0.0994264
1.29	-0.0305486	1.87506	-0.020588	0.0767932
1.3	-0.00558789	1.83005	-0.0261578	0.0715526
1.4	0.208351	1.40022	-0.00570573	0.0288807
1.5	0.500702	1.00213	-0.000701164	0.004984
1.57	0.738043	0.7437	-3.65921E-05	-3.58788E-05
1.6	0.846345	0.638978	-0.000154749	0.000805941
1.65	1.03439	0.473843	-0.000938745	0.00619067
1.7	1.23088	0.32228	-0.00282053	0.016499
1.75	1.43514	0.186894	-0.00667008	0.031624
1.76	1.4769	0.162045	-0.00780676	0.0352142
1.77	1.51898	0.138016	-0.00910745	0.0389894
1.78	1.56137	0.114844	-0.0105965	0.0429481
1.79	1.60408	0.0925752	-0.0123029	0.0470888
1.8	1.64713	0.0712589	-0.014262	0.0514096
1.85	1.86785	-0.0183458	-0.0299825	0.0756515
1.9	2.09977			0.104099
2	2.62193			0.172388
2.1	3.33717			0.25343
2.2	4.77887			0.343804
2.25	6.41157			0.39129
2.3	9.39363			0.439622
2.4		-10.3527		0.536651
2.5		-4.46395		0.630442
2.6		-2.5867		0.716454
2.7		-1.75693		0.790182



$\alpha$	S1	S2	S3	C
2.8		-1.18571		0.84727
2.89	0.979196	-0.74626	0.971411	0.881021
2.9	0.955864	-0.699767	0.972617	0.883611
3	0.743206	-0.252892	0.924214	0.895441
3.1	0.460305	0.162223	0.882018	0.879401
3.11	0.428956	0.201649	0.877682	0.876149
3.13	0.364667	0.279102	0.868931	0.86871
3.14	0.331718	0.317073	0.864524	0.864518
3.14159	0.323061	0.326429	0.863822	0.863822



Σχήμα 3.13. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος με  $\beta=\varepsilon=0$ .

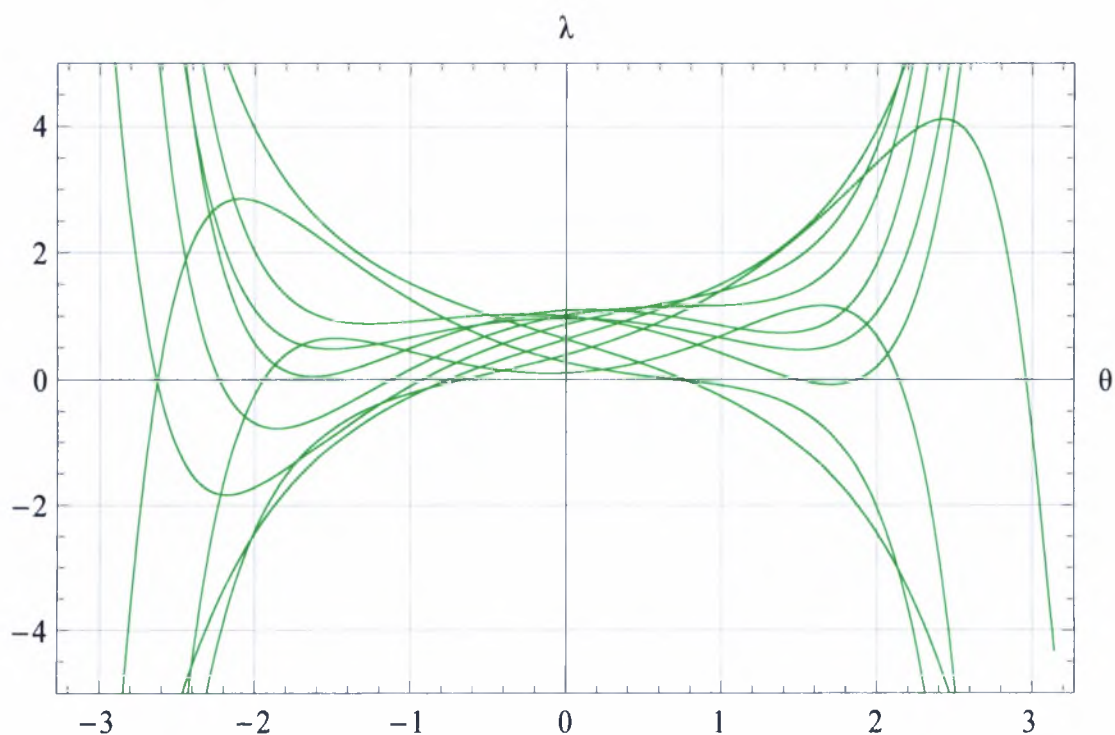
Από τη μορφή του συγκεκριμένου διαγράμματος, το οποίο παρουσιάζει πολλαπλές εκφυλισμένες και μη λοξές αιχμές καταδεικνύεται η τάση του ήπια διαταραγμένου συστήματος εμφάνισης τυπική μορφή καταστροφής τύπου χελιδονοσουράς.

### 3.7. Χρήση τριών μη μηδενικών παραμέτρων ελέγχου

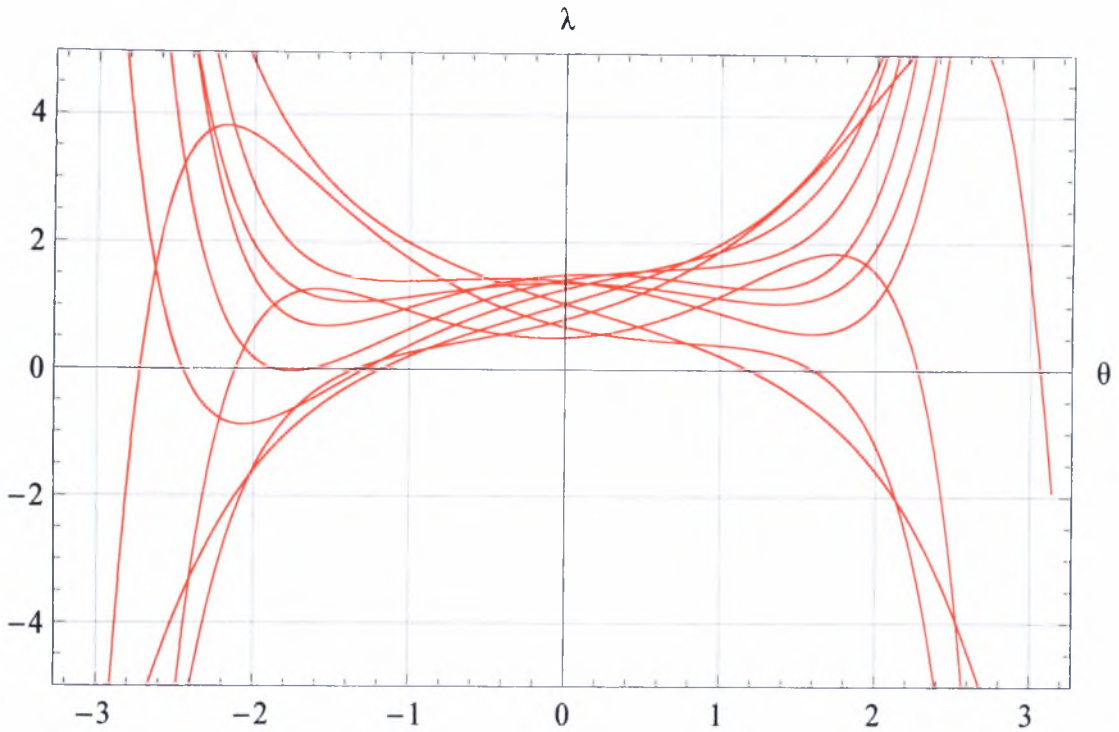
#### 3.7.1. Το «συνθετότερο» τέλειο σύστημα ( $a, \beta \neq 0, \varepsilon=0$ )

Για το συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων ελέγχου και απουσία της αρχικής ατέλειας, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει ως περαιτέρω διαταραχή είτε της περίπτωσης της §3.6.2 είτε αυτής της §3.6.3 και κατά μείζονα λόγο ως διπλή (σύνθετη διαταραχή) του «πλήρως τέλειου» συστήματος. Οι προκύπτουσες εκφράσεις του συνολικού δυναμικού, των δρόμων ισορροπίας και της 2ης μεταβολής του δυναμικού στις θέσεις ισορροπίας λόγω της μεγάλης τους έκτασης παρατίθενται στο Παράρτημα.

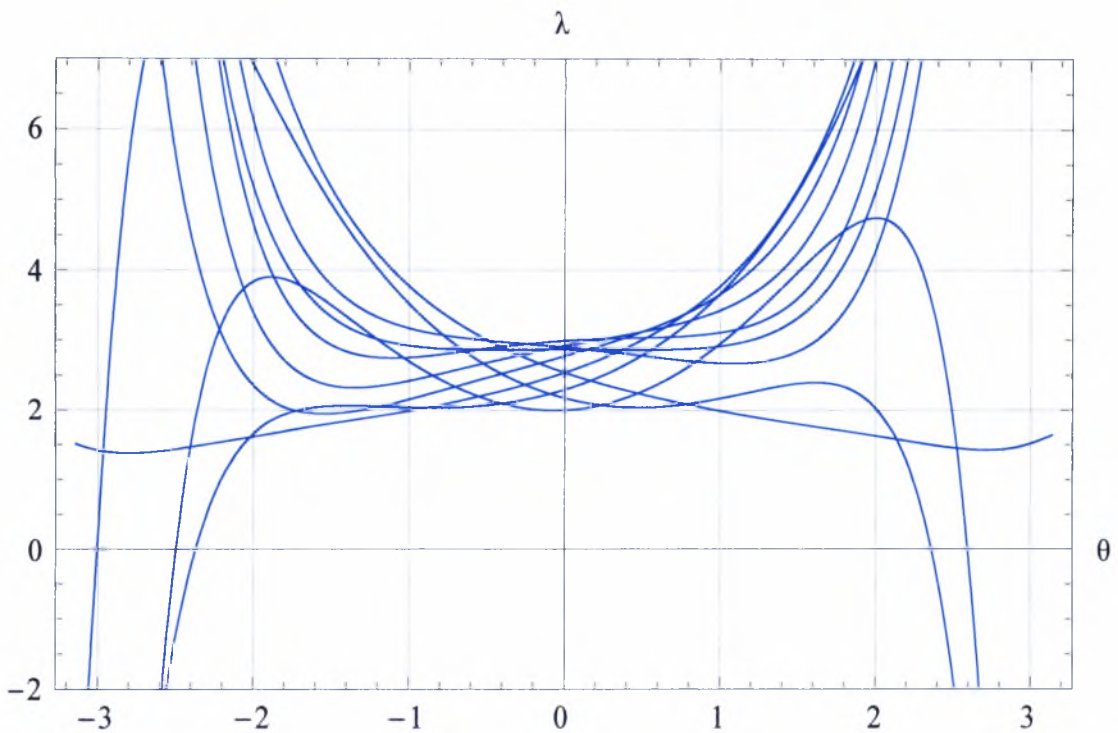
Η συνδυασμένη επιρροή της παρουσίας αμφοτέρων των παραμέτρων  $a$  και  $\beta$  στους δρόμους ισορροπίας, την ευστάθεια τους και στα σχετικά κρίσιμα σημεία του «πλήρως τέλειου» συστήματος, αλλά και των επί μέρους τέλειων συστημάτων με  $a \neq 0, \beta=ct$  κάθε φορά, καθώς και  $\beta \neq 0, a=ct$  κάθε φορά, απεικονίζεται γραφικά στους δρόμους ισορροπίας των Σχημάτων που ακολουθούν:



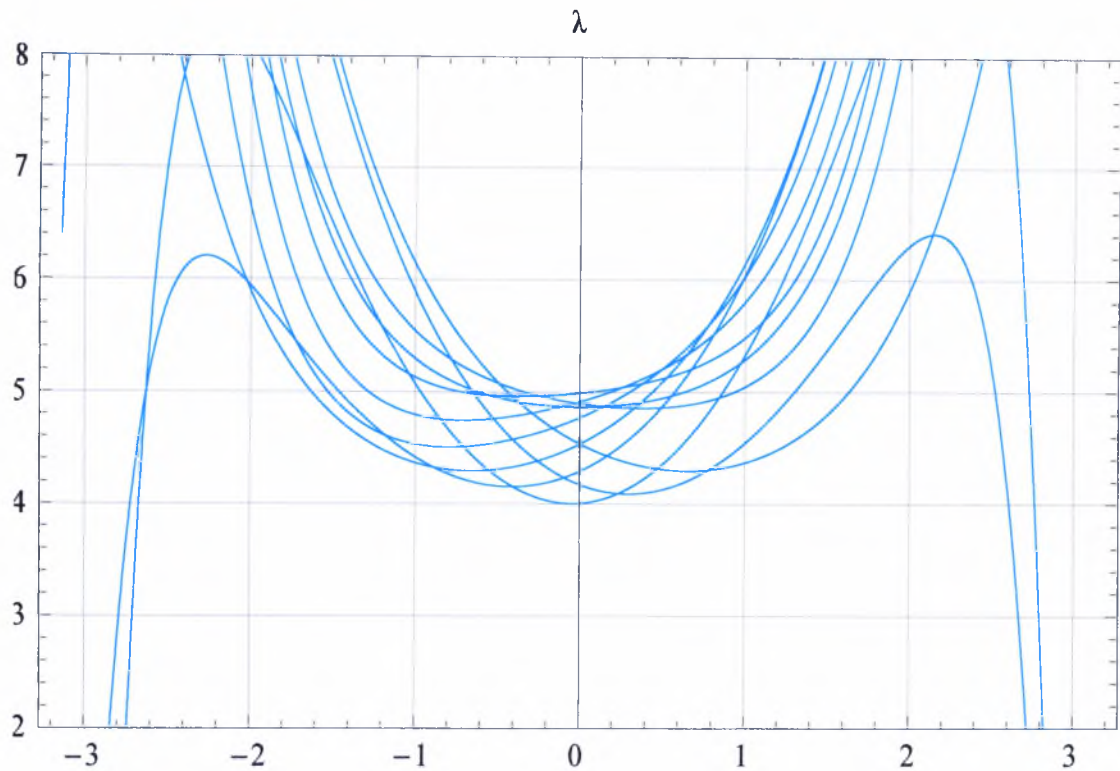
Σχήμα 3.14. Τυπικές καμπύλες δρόμων ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\beta = 0.10$  και διάφορες τιμές του  $a$  ( $0 \leq a < \pi$ ).



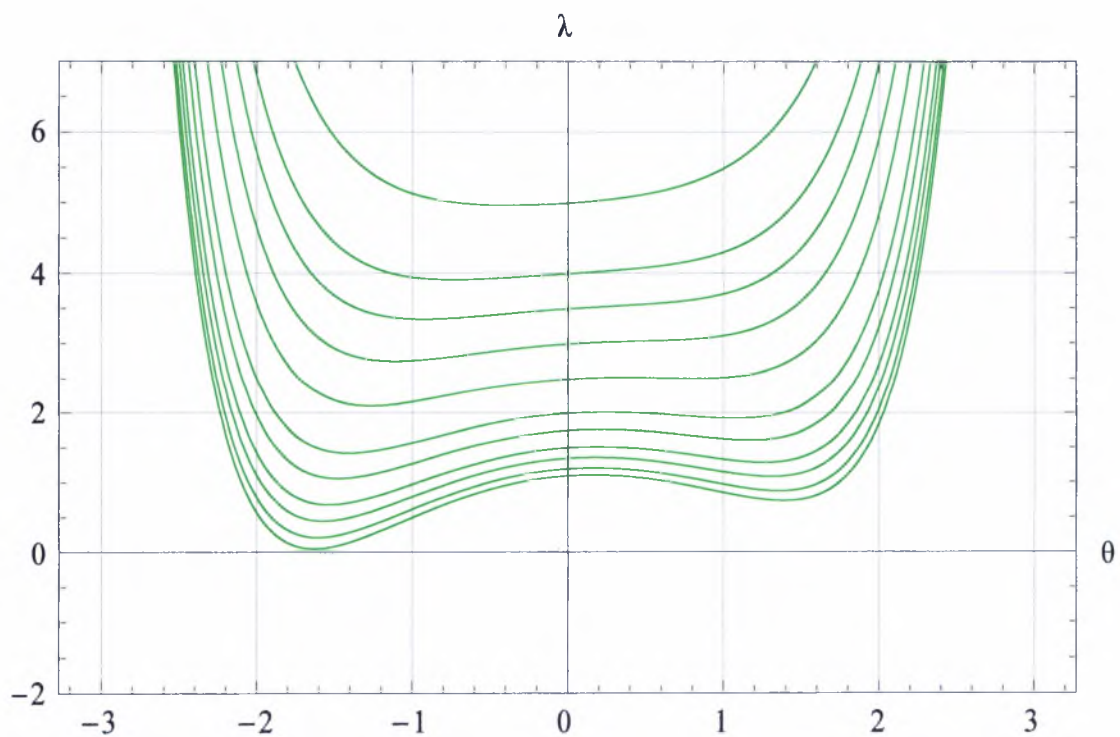
Σχήμα 3.15. Τυπικές καμπύλες δρόμων ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\beta = 0.50$  και διάφορες τιμές του  $a$  ( $0 \leq a < \pi$ ).



Σχήμα 3.16. Τυπικές καμπύλες δρόμων ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\beta = 2.0$  και διάφορες τιμές του  $a$  ( $0 \leq a < \pi$ ).

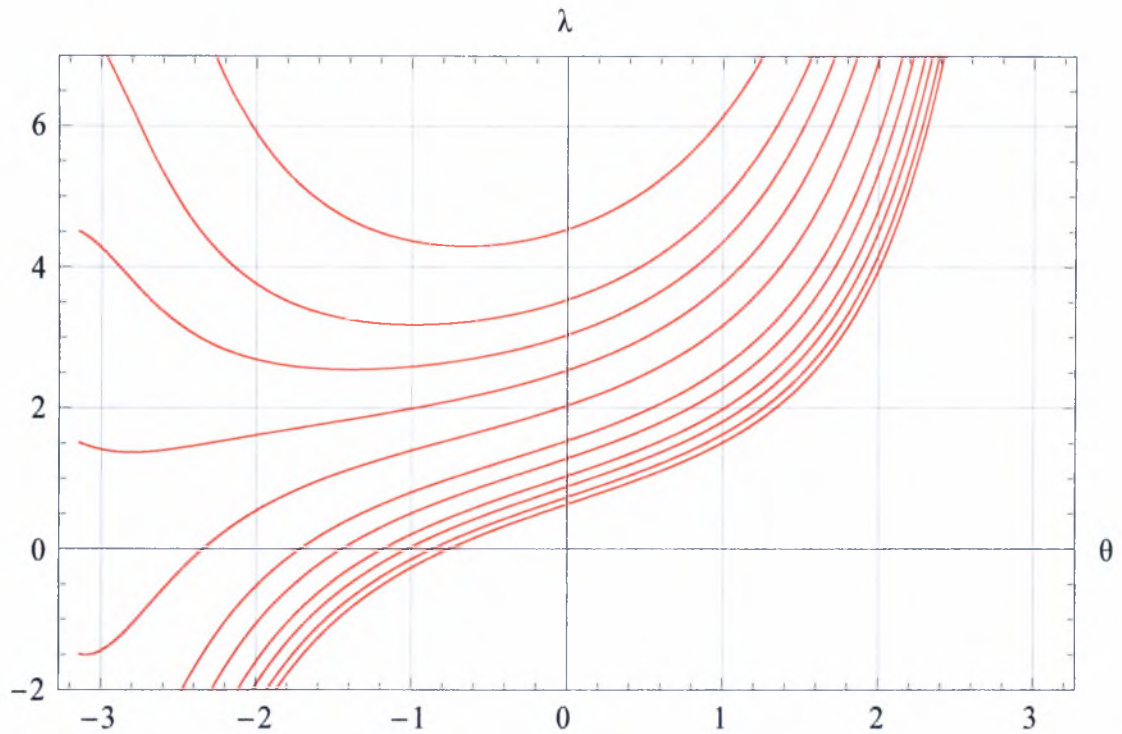


Σχήμα 3.17. Τυπικές καμπύλες δρόμων ισορροπίας  $(\theta, \lambda)$  του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\beta = 4.0$  και διάφορες τιμές του  $a$  ( $0 \leq a < \pi$ ).

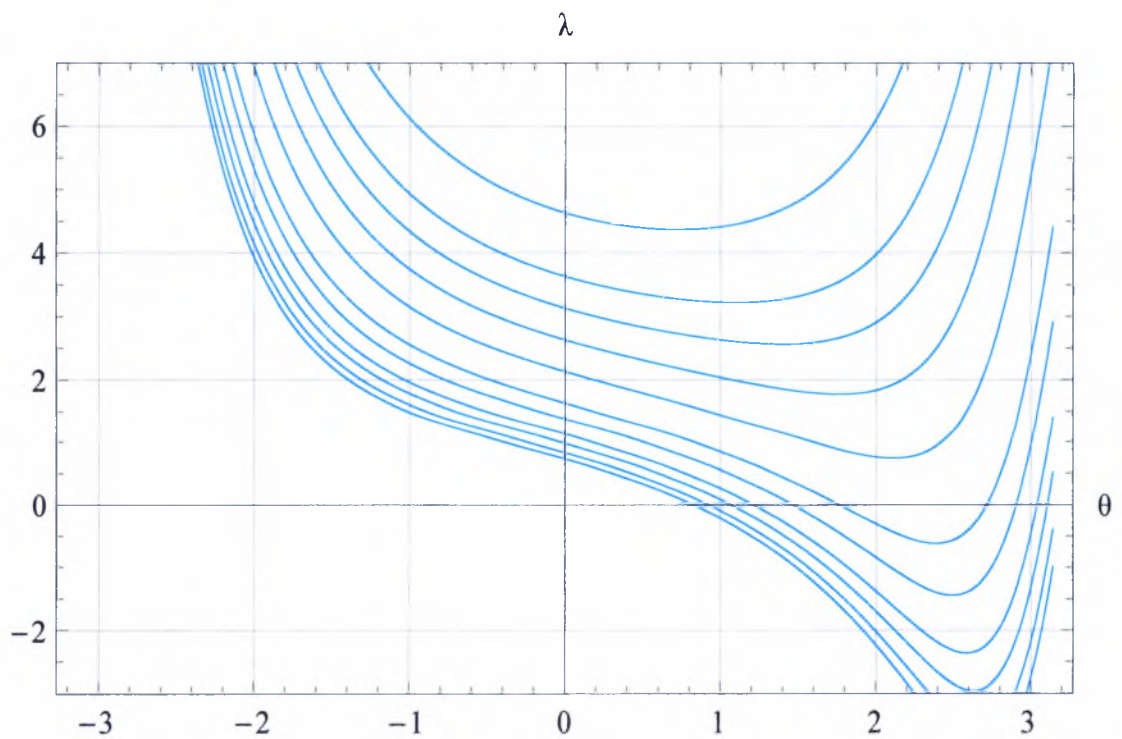


Σχήμα 3.18. Δρόμοι ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος για  $a=0.1$  και διάφορες τιμές του  $\beta$ .





Σχήμα 3.19. Δρόμοι ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος για  $a=0.75$  και διάφορες τιμές του  $\beta$ .



Σχήμα 3.20. Δρόμοι ισορροπίας του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος για  $a=2.5$  και διάφορες τιμές του  $\beta$ .

Κατ' αρχήν, η σταδιακή αύξηση της παραμέτρου  $\beta$  οδηγεί σε ανύψωση των δρόμων ισορροπίας, ενώ αυξανόμενου του  $a$  - και για τιμές του μικρότερες του  $\pi/2$  - τα διαγράμματα αυτά περιστρέφονται αριστερόστροφα, ενώ το αντίθετο λαμβάνει χώρα (δεξιόστροφη περιστροφή) για  $a > \pi/2$ . Πέραν τούτων, για κάθε  $a, \beta$  το σύστημα εμφανίζει ένα ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης, το δε αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο υπολογίζεται εύκολα βρίσκοντας το όριο της συνάρτησης  $\lambda_c$  και ισούται με:

$$\lambda_c = \frac{613305(1+\beta) + 378a^4(361+11\beta) + a^6(-7244+127\beta) + 315a^2(-1718+229\beta)}{613305 + 72135a^2 + 4158a^4 + 127a^6} \quad (3.31)$$

που για μεν  $a=0$  μεταπίπτει στην τιμή  $\lambda_c = \beta + 1$  [σχέση (3.25)], για δε  $\beta=0$  στην τιμή  $\lambda_c = \frac{613305 - 541170a^2 + 136458a^4 - 7244a^6}{613305 + 72135a^2 + 4158a^4 + 127a^6}$  [σχέση (3.30)].

Εκτός όμως από το ανωτέρω σημείο διακλάδωσης, οι δρόμοι ισορροπίας παρουσιάζουν και άλλα κρίσιμα σημεία. Πρόκειται περί οριακών σημείων, ο γεωμετρικός τόπος των οποίων μπορεί να υπολογιστεί με την παρακάτω διαδικασία, η οποία φαίνεται αναλυτικά στο Παράρτημα. Θα εξεταστούν οι τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις ( $a = 0.10, 0.75, 2.50$  και  $\beta \neq 0$ .) των δρόμων ισορροπίας που ήδη έχουν απεικονισθεί.

Κρατώντας για κάθε περίπτωση σταθερή την τιμή του  $a$  και μεταβάλλοντας το  $\beta$ , βρίσκουμε το όριο του  $\lambda_c$ , αντικαθιστώντας στην αρχική έκφραση του  $\lambda$  τις τιμές των  $a, \beta$ . Κατόπιν γίνεται επίλυση ως προς  $\theta$ , της εξίσωσης της 2<sup>ης</sup> μεταβολής του  $V$  έχοντας αντικαταστήσει όπου  $\lambda$  το  $\lambda_c$ , και προκύπτουν τα οριακά σημεία του συστήματος. Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα τα οποία σχετίζονται με τα Σχήματα 3.18 έως 3.20 παρατηρούμε ότι:

(α) Για  $a < \pi/2$  και για κάθε  $\beta$ , το σύστημα παρουσιάζει πάντοτε ένα οριακό σημείο για αρνητικές τιμές της γενικευμένης συντεταγμένης  $\theta$ , αυξανόμενου δε του  $\beta$  η τιμή του οριακού φορτίου τείνει ασυμπτωτικά στο  $+\infty$  και η αντίστοιχη γωνία ασυμπτωτικά στο 0. Σε ότι δε αφορά οριακά σημεία για  $\theta > 0$  ισχύει ότι για σχετικά μικρές τιμές του  $\beta$  υφίσταται μόνο ένα οριακό σημείο, το οποίο αποτελεί «διαταραχή» του αντίστοιχου οριακού σημείου του συστήματος με  $\beta=0$ . Αυξανόμενου του  $\beta$  εμφανίζεται και δεύτερο οριακό σημείο για κάποια συγκεκριμένη τιμή της

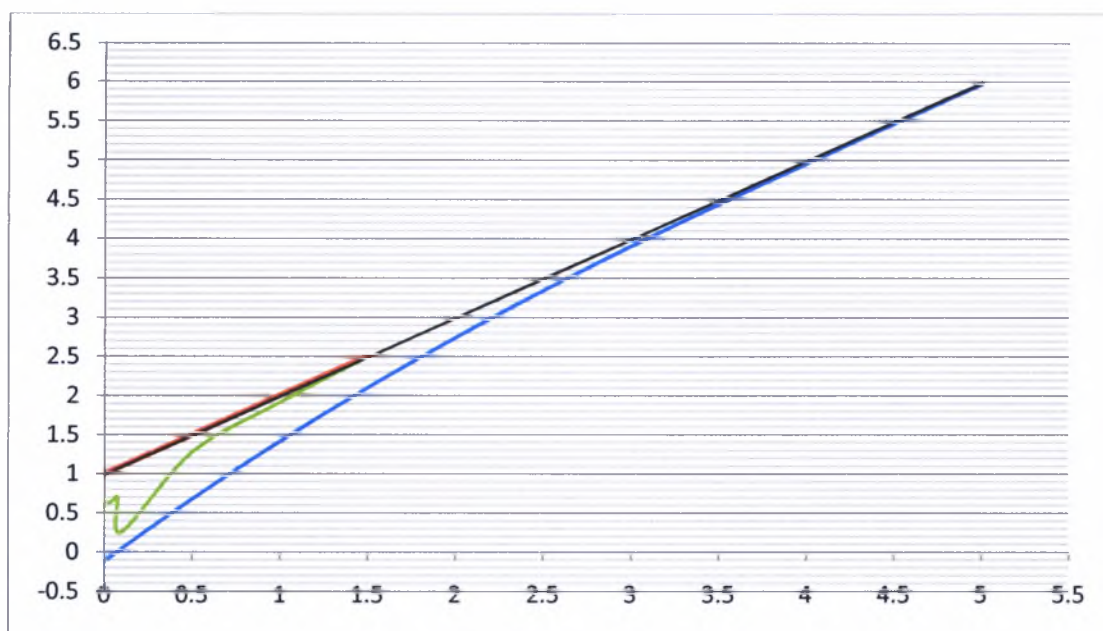


παραμέτρου αυτής (η οποία εύκολα υπολογίζεται αριθμητικά) και στη συνέχεια τα δύο αυτά οριακά σημεία τείνουν να συμπέσουν για μεγαλύτερες τιμές του  $\beta$ . Για κάποια δε συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή του  $\beta=\beta_{cr}$  (για την οποία ο δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει σημείο καμπής, η δε καμπύλη του γεωμετρικού τόπου των οριακών σημείων τοπικό μέγιστο) τα ως άνω δύο οριακά σημεία συμπίπτουν και για  $\beta>\beta_{cr}$  εξαφανίζονται.

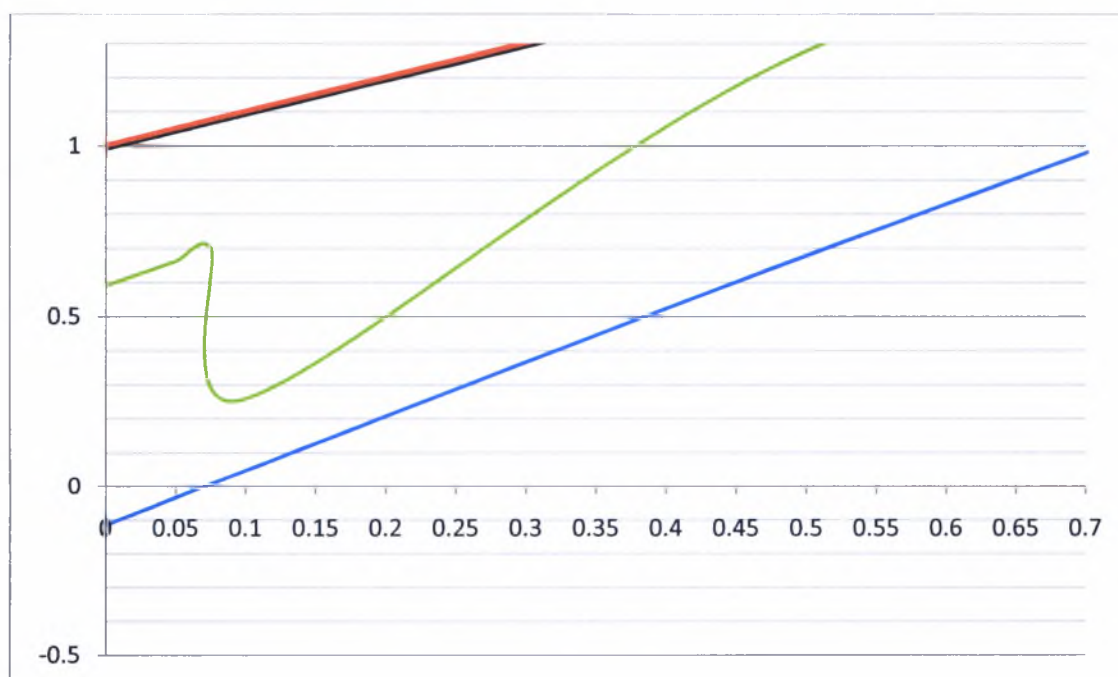
(β) Για  $\alpha>\pi/2$  τα ως άνω φαινόμενα επίσης χαρακτηρίζουν το σύστημα, με τη διαφορά ότι συμβαίνουν στα αντίθετα ημιεπίπεδα σε σχέση με τον άξονα του φορτίου, δηλαδή για γωνίες αντίθετου προσήμου.

Στη συνέχεια χαράσσονται τα διαγράμματα διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος για τις ως άνω χαρακτηριστικές τιμές του  $\alpha$  μεταβάλλοντας το  $\beta$ , και συγκρίνονται με το αντίστοιχο διάγραμμα του συστήματος με  $\alpha=0$  του Σχήματος 3.13. Αυτά παρατίθενται στα Σχήματα 3.21. – 3.25. που ακολουθούν, συνοδευόμενα από πίνακες που περιέχουν τις τιμές οι οποίες σχετίζονται με τα εμφανιζόμενα κρίσιμα σημεία.

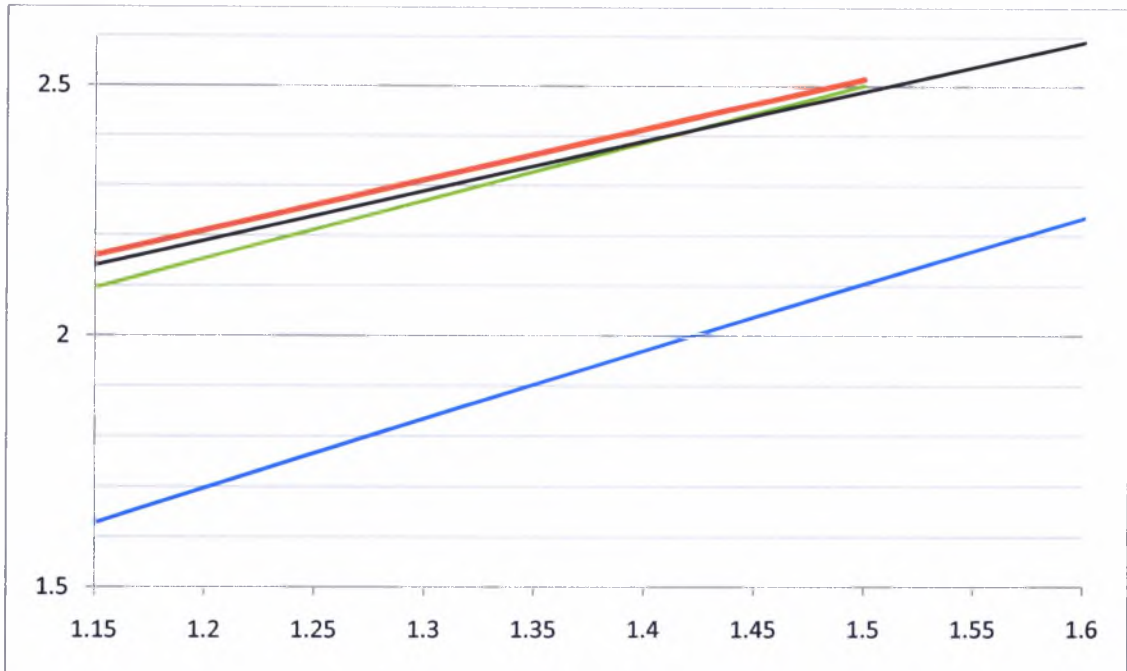
$\beta$	$\alpha=0.1$			
	Μοναδικό οριακό σημείο	Νέο απομακρυσμένο	Κλασικό οριακό	Σημείο διακλάδωσης
	s	$\lambda s1$	$\lambda c$	c
0	-0.115109	0.591014	1.00147	0.990033
0.005	-0.106876	0.598158	1.00649	0.995033
0.01	-0.0986482	0.605295	1.01151	1.00003
0.015	-0.0904267	0.612427	1.01653	1.00503
0.02	-0.0822112	0.619554	1.02155	1.01003
0.05	-0.0330446	0.662202	1.05168	1.04003
0.075	0.00776276	0.697592	1.07678	1.06503
0.1	0.0484208	0.259148	1.10189	1.09003
0.5	0.679111	1.27895	1.5039	1.49003
1	1.41747	1.91546	2.00772	1.99003
1.5	2.10455	2.50183	2.51495	2.49003
2	2.74503			2.99003
2.5	3.34391			3.49003
3	3.90709			3.99003
3.5	4.44243			4.49003
4	4.96006			4.99003
4.5	5.46894			5.49003
5	5.97392			5.99003



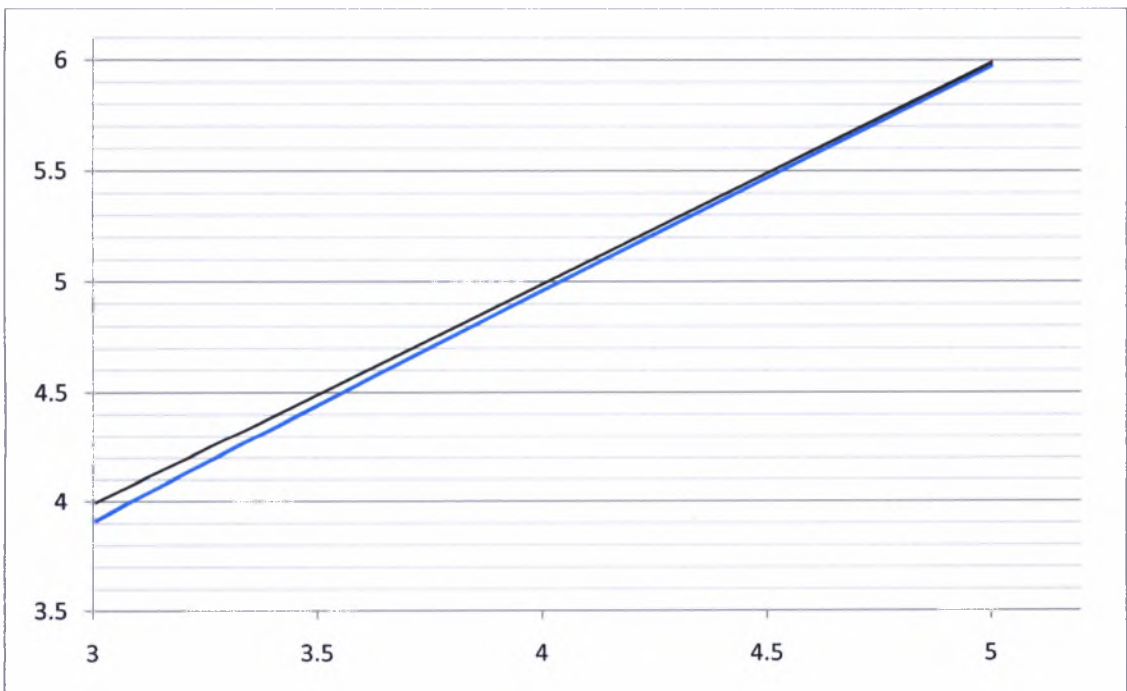
Σχήμα 3.21. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\beta, \lambda_{cr}$ ) του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=0.1$ .



Σχήμα 3.22. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=0.1$ .

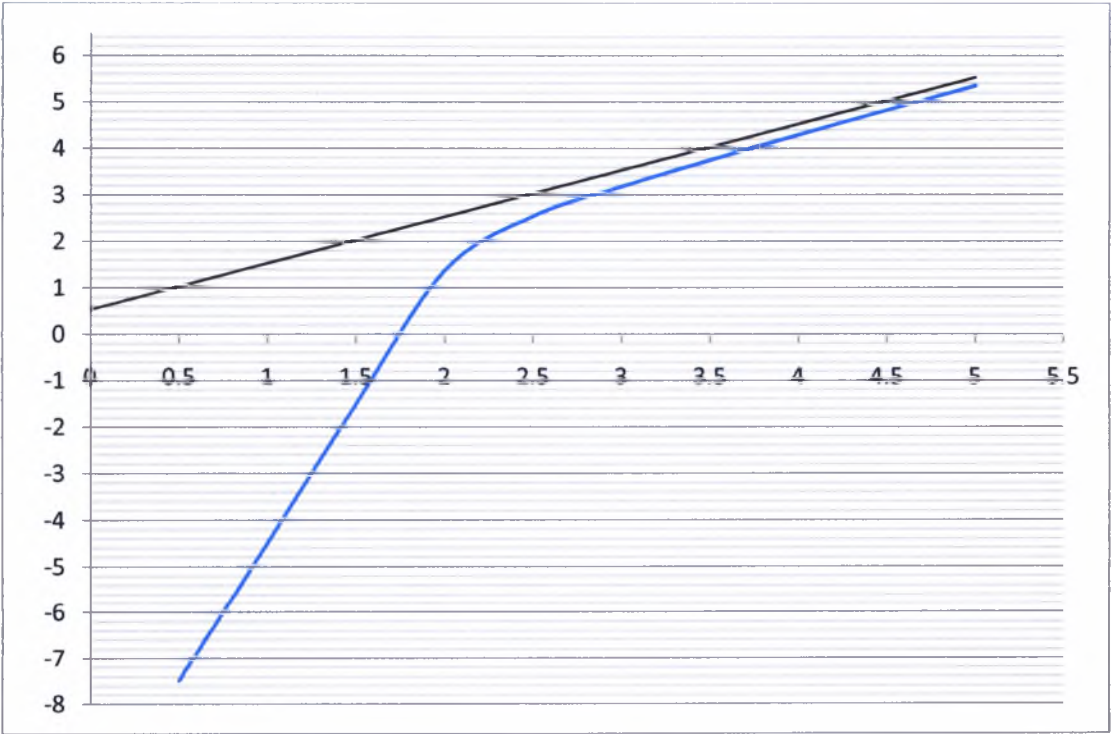


Σχήμα 3.23. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=0.1$ .



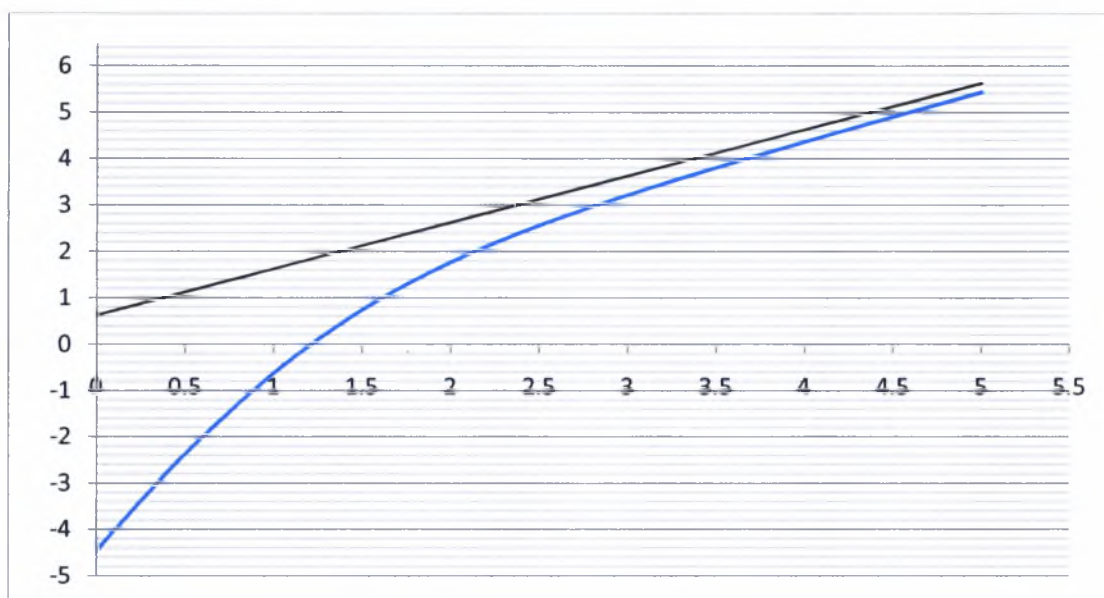
Σχήμα 3.24. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=0.1$ .

$\alpha=0.75$		
$\beta$	s	c
0		0.535369
0.1		0.635369
0.5	-7.48631	1.03537
1	-4.49107	1.53537
1.5	-1.50401	2.03537
2	1.36951	2.53537
2.5	2.54468	3.03537
3	3.17927	3.53537
3.5	3.7496	4.03537
4	4.29485	4.53537
4.5	4.82698	5.03537
5	5.35116	5.53537



Σχήμα 3.25. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων  $(\beta,\lambda_{cr})$  του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=0.75$ .

$\alpha=2.5$		
$\beta$	$s$	$c$
0	-4.46395	0.630442
0.1	-4.02054	0.730442
0.5	-2.36779	1.13044
1	-0.62024	1.63044
1.5	0.744007	2.13044
2	1.7711	2.63044
2.5	2.56237	3.13044
3	3.21979	3.63044
3.5	3.81062	4.13044
4	4.36828	4.63044
4.5	4.90797	5.13044
5	5.43698	5.63044



Σχήμα 3.26. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων  $(\beta, \lambda_c)$  του «συνθετότερου» τέλειου συστήματος με  $\alpha=2.5$ .

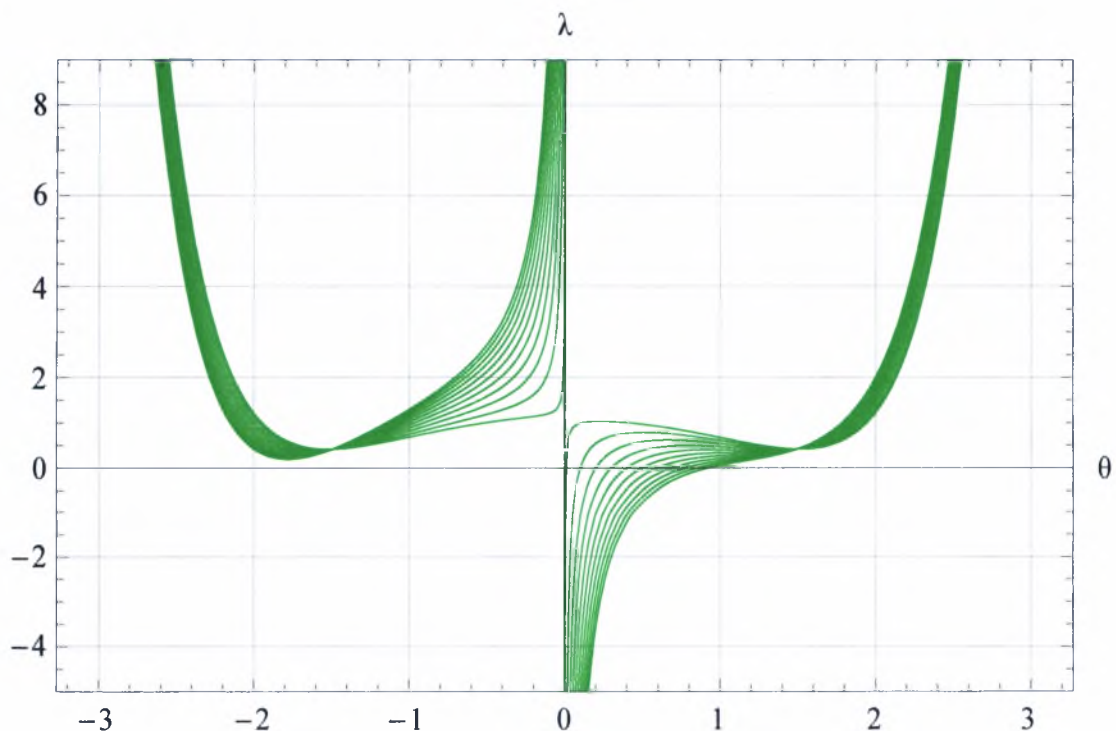


**3.7.2. Το ατελές σύστημα με οριζόντιο ελατήριο ( $\beta, \varepsilon \neq 0, a=0$ )**

Πρόκειται για ουσιαστική διαταραχή μέσω εισαγωγής αρχικής ατέλειας του συστήματος της §3.6.2. Στη περίπτωση αυτή το συνολικό δυναμικό, ο δρόμος ισορροπίας και η 2η μεταβολή του  $V$  στα σημεία ισορροπίας φαίνονται στο Παράρτημα λόγω της μεγάλης έκτασής τους.

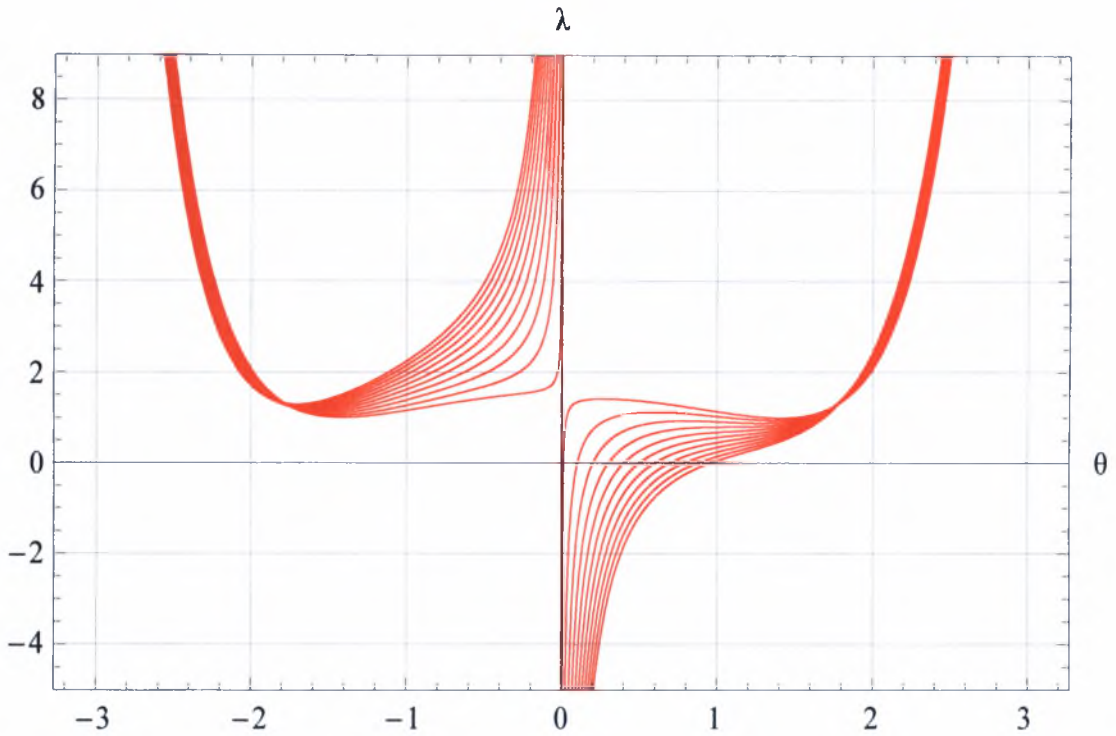
Οι τυπικοί δρόμοι ισορροπίας για έξι χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου  $\beta$  και θετική και αρνητική γωνιακή ατέλεια  $\varepsilon$  εμφανίζονται στα Σχήματα που ακολουθούν. Για θετικές και αρνητικές τιμές της ατέλειας  $\varepsilon$  οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν είναι συμμετρικοί ως προς τον (κατακόρυφο) άξονα του φορτίου. Πρόκειται περί κλασικής περίπτωσης διακλαδώσεων διάσπασης συμμετρίας (symmetry breaking bifurcation).

**Για  $\varepsilon > 0$ :**

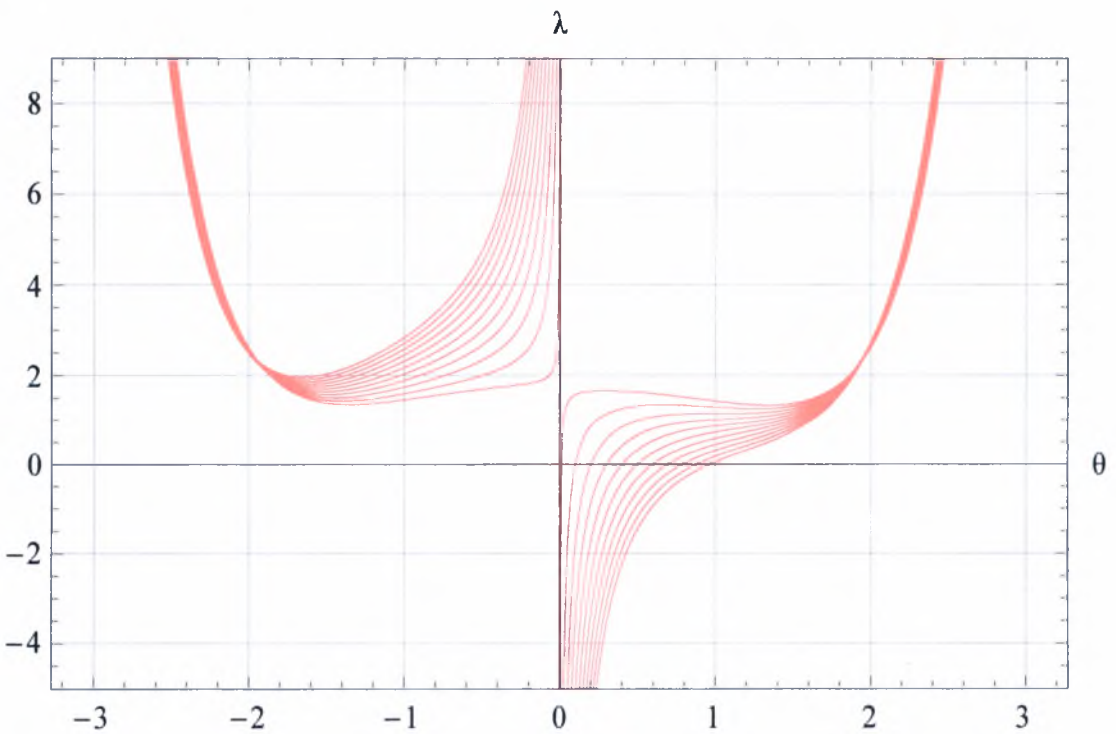


Σχήμα 3.27. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.1$

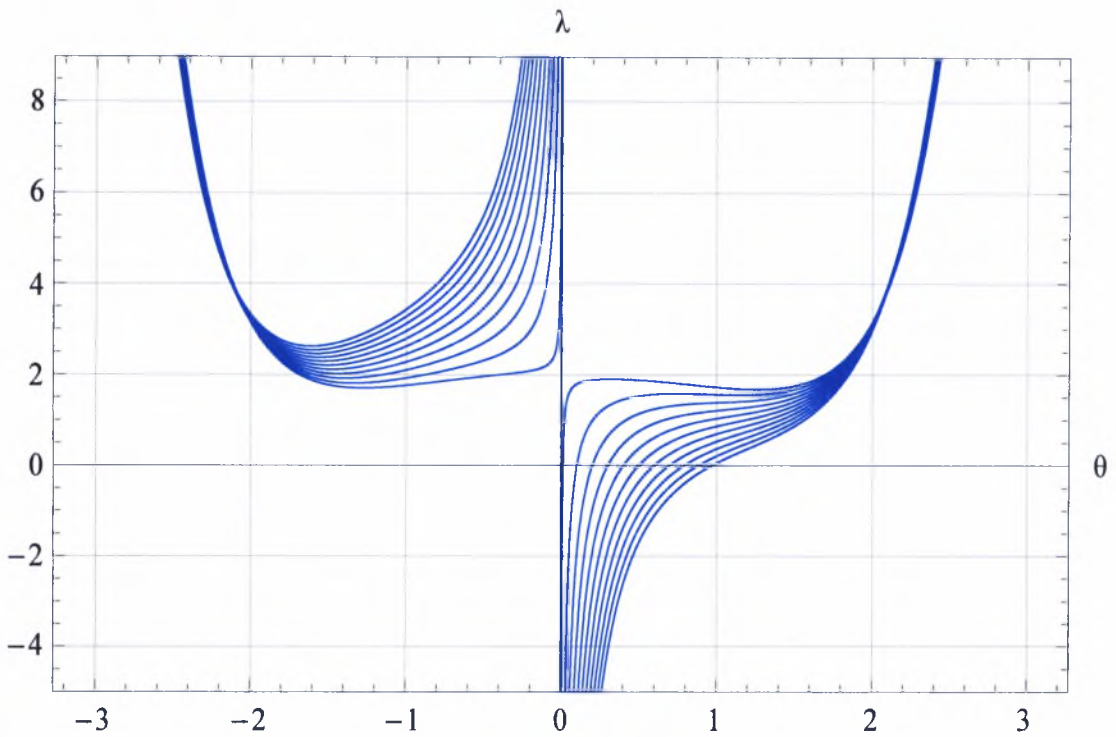




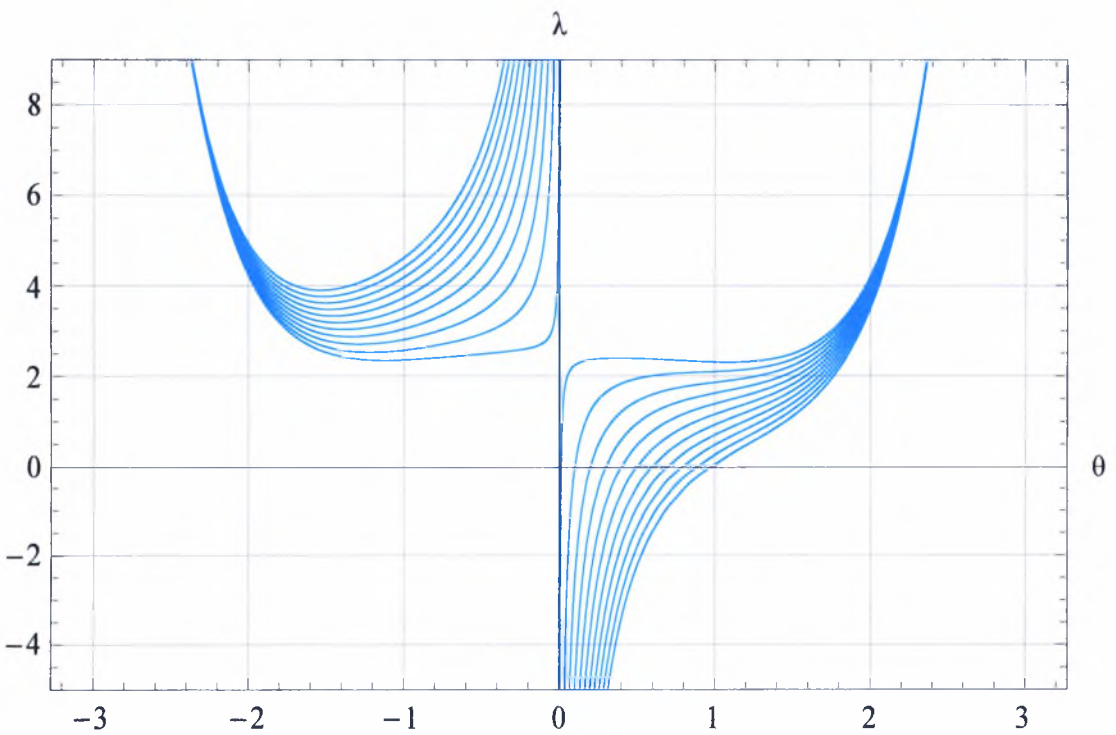
Σχήμα 3. 27. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.5$



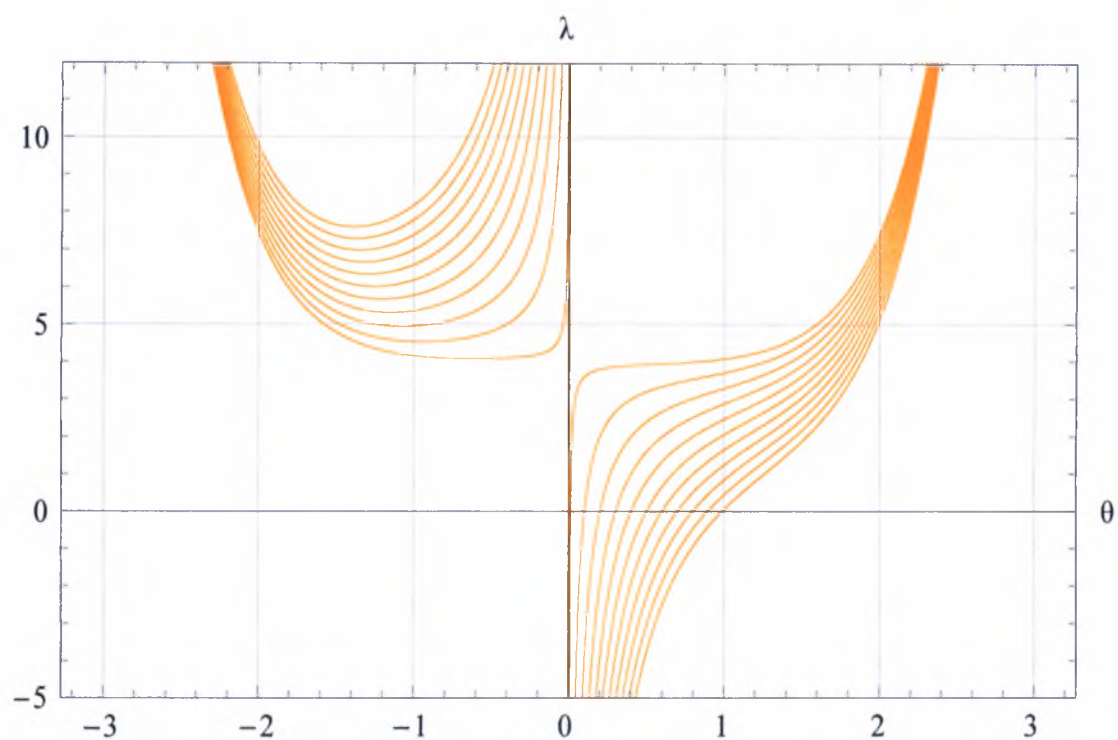
Σχήμα 3. 28. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.75$



Σχήμα 3.29. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.0$

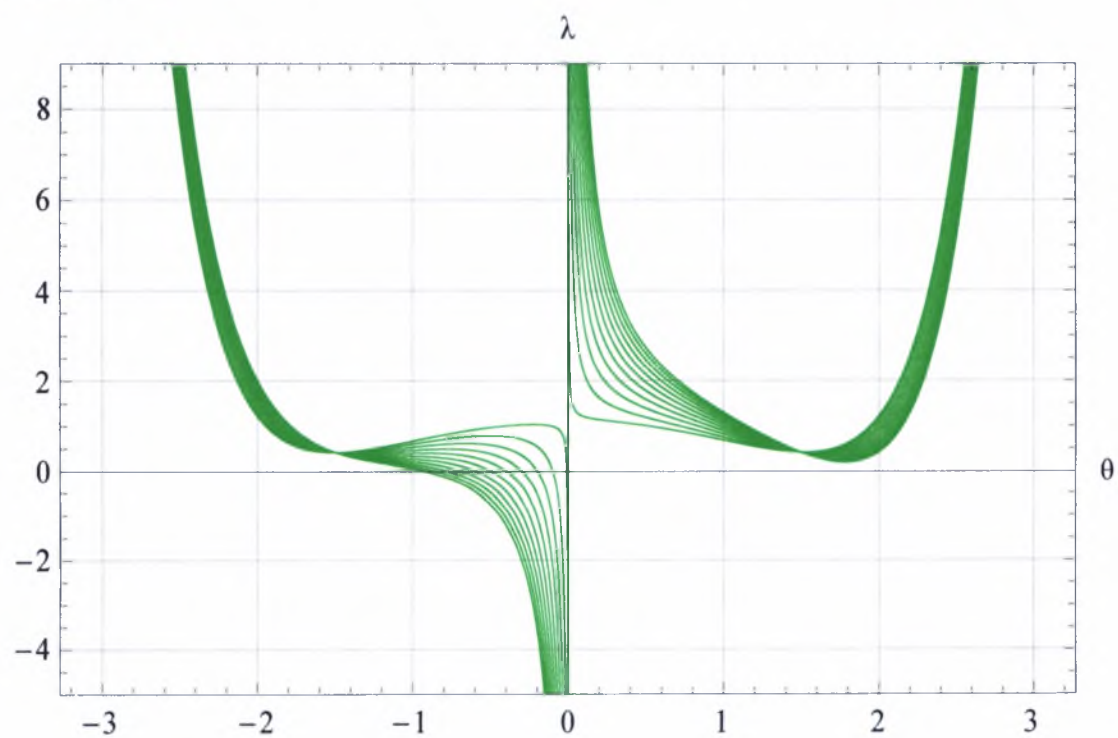


Σχήμα 3.30. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.5$

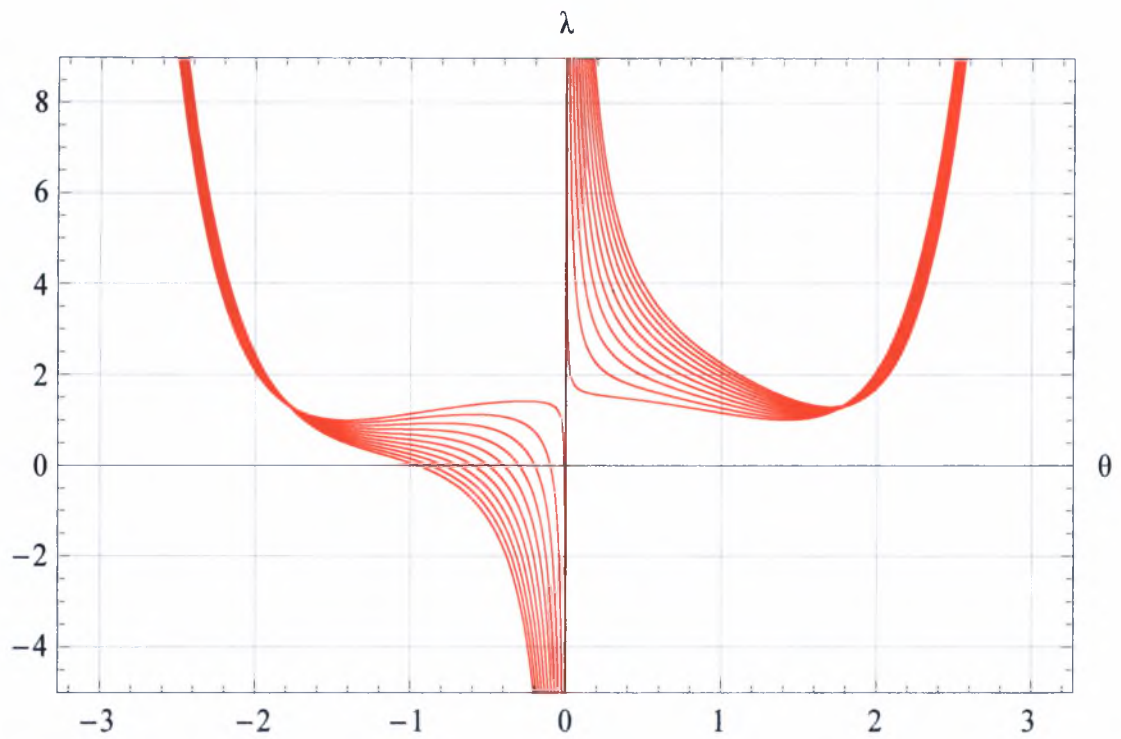


Σχήμα 3.31. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=3.0$

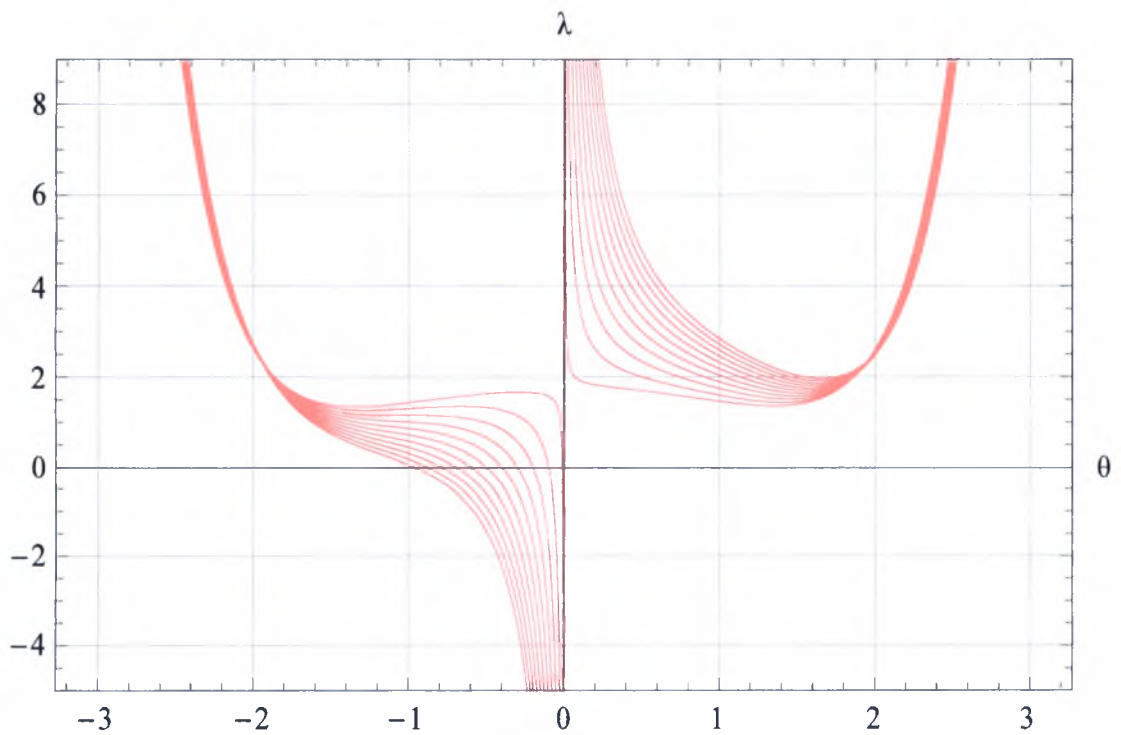
Για  $\varepsilon < 0$ :



Σχήμα 3.32. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.1$

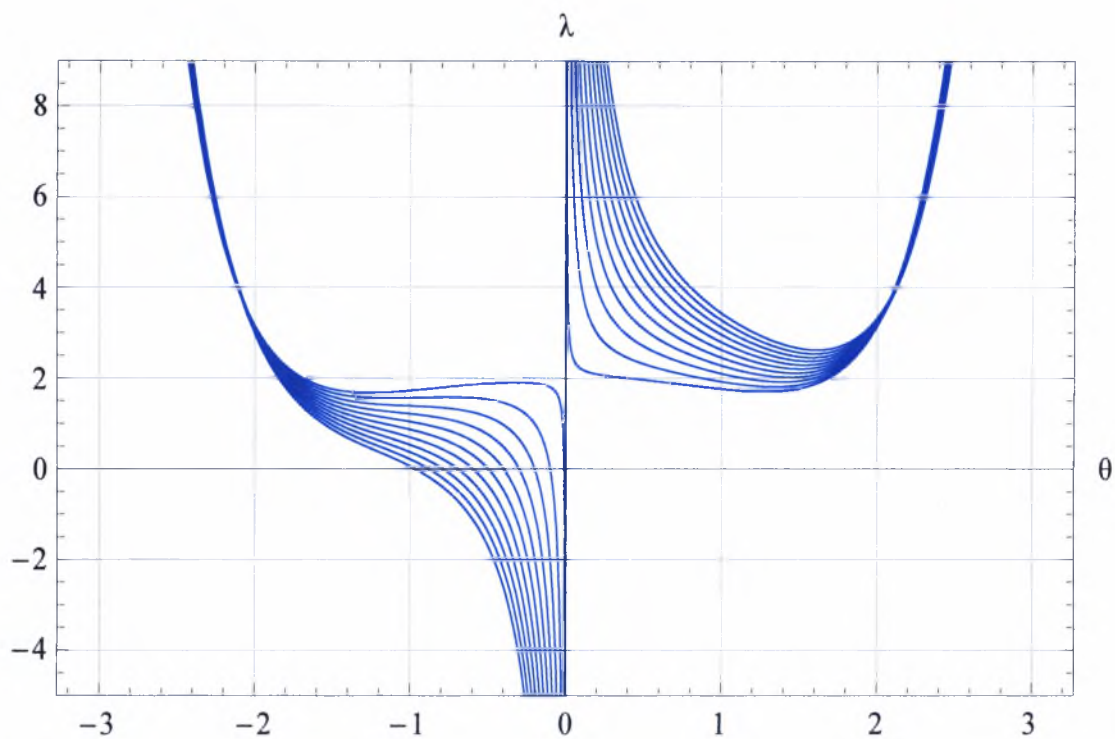


Σχήμα 3.33. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.5$

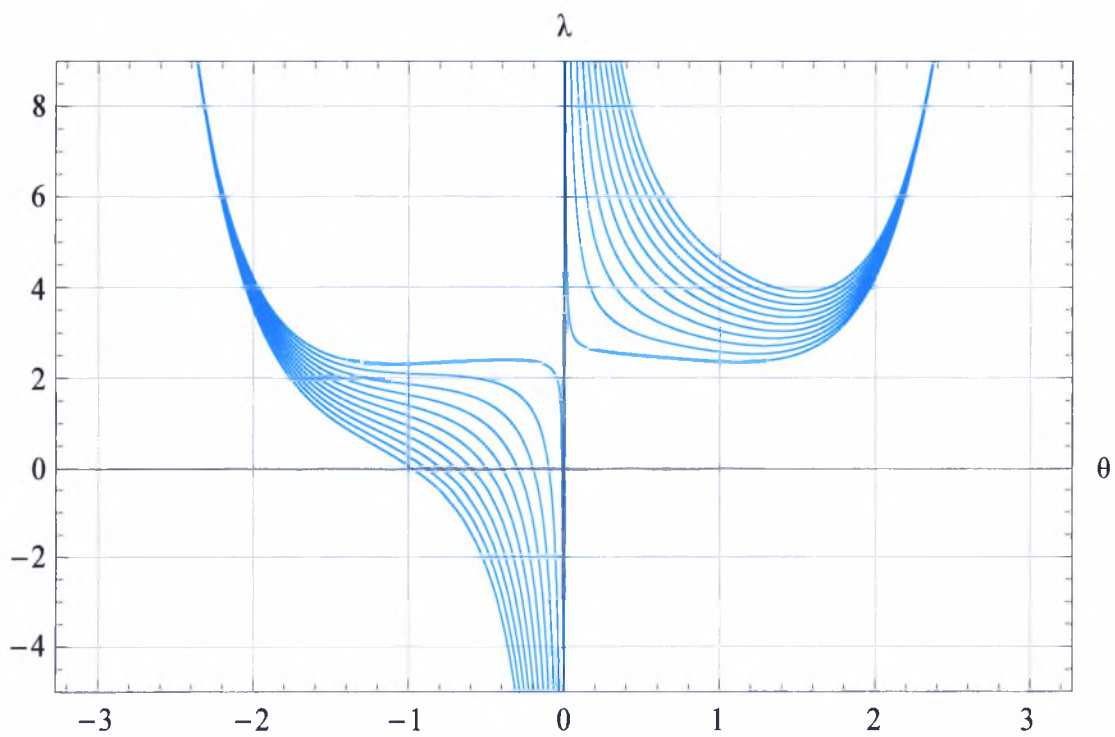


Σχήμα 3.34. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.75$

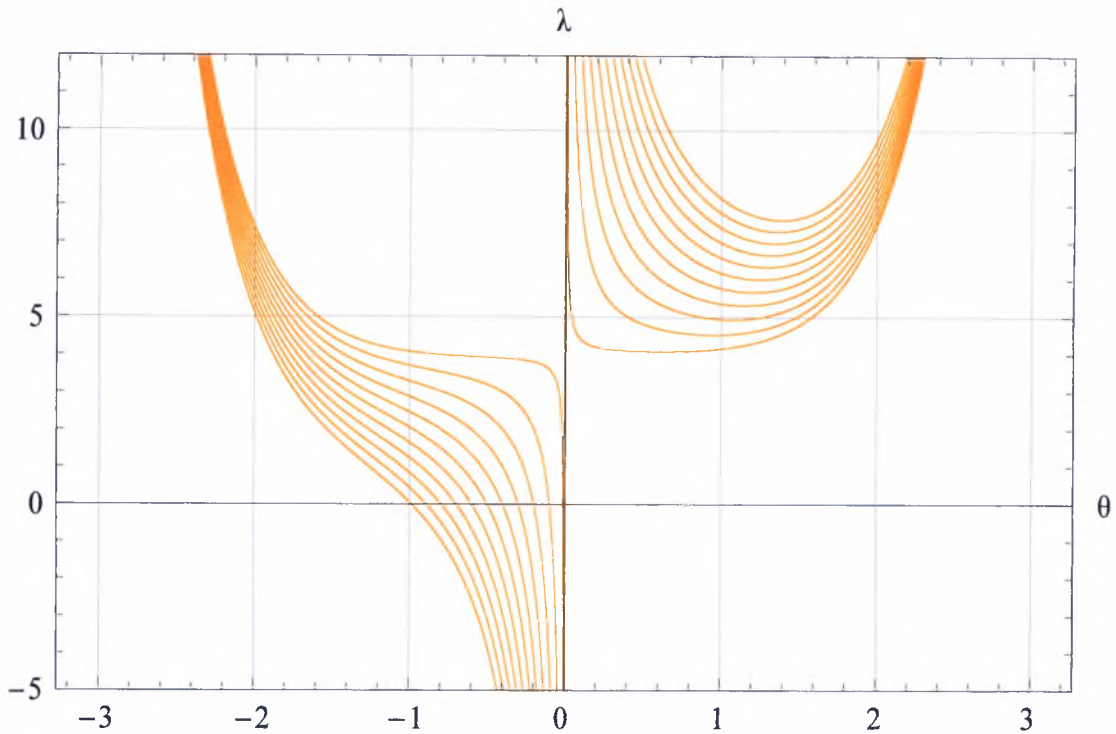




Σχήμα 3.35. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.0$



Σχήμα 3.36. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.5$



Σχήμα 3.37. Δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=3.0$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι για τιμές του  $\beta$  για τις οποίες το αντίστοιχο τέλει σύστημα παρουσιάζει πέραν του ασταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης και δυο οριακά σημεία, οι μεν συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας του ατελούς συστήματος παρουσιάζουν ένα οριακό σημείο, το οποίο προήλθε από διαταραχή του ενός οριακού σημείου του τέλει συστήματος, οι δε κύριοι δρόμοι παρουσιάζουν δυο οριακά σημεία, ένα προερχόμενο από διαταραχή του σημείου διακλάδωσης του τέλει συστήματος και ένα από διαταραχή του άλλου οριακού του σημείου. Αντίθετα, αν  $\beta \geq 3$  (ύπαρξη μόνο συμμετρικού ευσταθούς διακλαδικού σημείου) το μοναδικό οριακό σημείο του διαταραγμένου συστήματος εμφανίζεται στους συμπληρωματικούς δρόμους και αποτελεί διαταραχή του σημείου διακλάδωσης, ενώ οι κύριοι δρόμοι είναι μονοτονικά αύξοντες. Επίσης, όπου οι κύριοι δρόμοι παρουσιάζουν δυο οριακά σημεία, υφίσταται πάντοτε μια κρίσιμη τιμή της αρχικής ατέλειας όπου εμφανίζεται σημείο καμπής (αποκοπής, cut-off point). Για μεγαλύτερα  $\varepsilon$  οι δρόμοι αυτοί καθίστανται πλέον μονοτονικά αύξοντες. Στα διαγράμματα διαταραγμένων

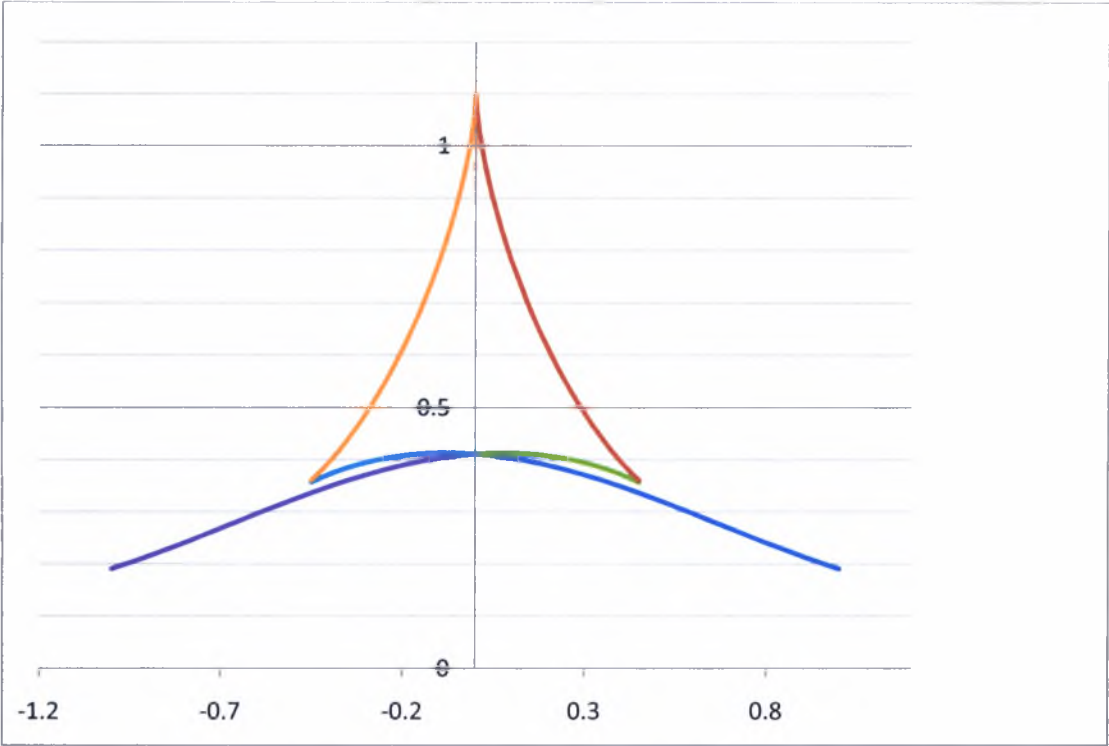


διακλαδώσεων που ακολουθούν (συνοδευόμενα από πίνακες με τα στοιχεία των κρίσιμων σημείων) φαίνονται εποπτικά οι ανωτέρω παρατηρήσεις. Στα εν λόγω διαγράμματα ο άξονας των τετμημένων περιέχει τιμές της αρχικής ατέλειας  $\varepsilon$  ενώ ο άξονας των τετμημένων των φορτίων των κρίσιμων σημείων του συστήματος.

$\beta=0.1$	$\alpha=0$
-------------	------------

$\varepsilon$	1	2	3
0	0.411653	0.411653	1.1
0.002	0.41155	0.411753	1.07501
0.004	0.411444	0.411851	1.06042
0.006	0.411336	0.411946	1.04824
0.008	0.411226	0.412039	1.0374
0.01	0.411113	0.41213	1.02748
0.02	0.41051	0.412543	0.985687
0.03	0.409846	0.412892	0.951113
0.04	0.409122	0.413176	0.920635
0.05	0.408337	0.413394	0.892952
0.06	0.407492	0.413546	0.867361
0.07	0.406589	0.41363	0.84343
0.08	0.405628	0.413647	0.820867
0.09	0.40461	0.413595	0.799463
0.1	0.403535	0.413473	0.779065
0.15	0.397339	0.411802	0.688728
0.2	0.389845	0.408284	0.612657
0.25	0.381156	0.40281	0.547043
0.3	0.371378	0.39524	0.489916
0.35	0.360625	0.385373	0.440178
0.4	0.349015	0.372867	0.397303
0.45	0.33667	0.356962	0.361442
0.5	0.323721		
0.55	0.3103		
0.6	0.296542		
0.7	0.268575		
0.8	0.240952		
0.9	0.2148		
1	0.191216		

ε	s	λs1	λs
0	0.411653	0.411653	1.1
-0.002	0.41155	0.411753	1.07501
-0.004	0.411444	0.411851	1.06042
-0.006	0.411336	0.411946	1.04824
-0.008	0.411226	0.412039	1.0374
-0.01	0.411113	0.41213	1.02748
-0.02	0.41051	0.412543	0.985687
-0.03	0.409846	0.412892	0.951113
-0.04	0.409122	0.413176	0.920635
-0.05	0.408337	0.413394	0.892952
-0.06	0.407492	0.413546	0.867361
-0.07	0.406589	0.41363	0.84343
-0.08	0.405628	0.413647	0.820867
-0.09	0.40461	0.413595	0.799463
-0.1	0.403535	0.413473	0.779065
-0.15	0.397339	0.411802	0.688728
-0.2	0.389845	0.408284	0.612657
-0.25	0.381156	0.40281	0.547043
-0.3	0.371378	0.39524	0.489916
-0.35	0.360625	0.385373	0.440178
-0.4	0.349015	0.372867	0.397303
-0.45	0.33667	0.356962	0.361442
-0.5	0.323721		
-0.55	0.3103		
-0.6	0.296542		
-0.7	0.268575		
-0.8	0.240952		
-0.9	0.2148		
-1	0.191216		



Σχήμα 3.38. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\varepsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.10$ .

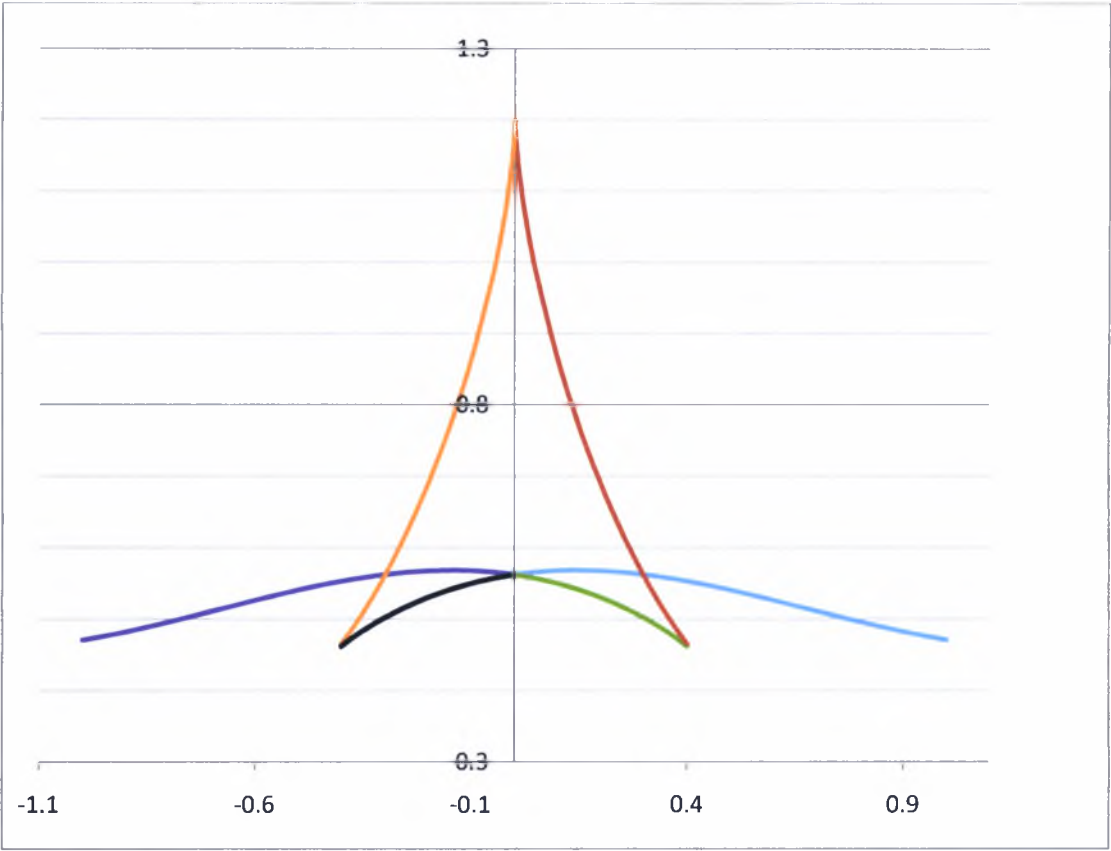
$\beta=0.2$	$\alpha=0$
-------------	------------

$\varepsilon$	1	2	3
0	0.561959	0.561959	1.2
0.002	0.562131	0.561785	1.17382
0.004	0.5623	0.561608	1.15854
0.006	0.562466	0.561428	1.14577
0.008	0.56263	0.561246	1.13442
0.01	0.562791	0.561061	1.12402
0.02	0.563558	0.560096	1.08022
0.03	0.564261	0.559064	1.04397
0.04	0.564901	0.557964	1.012
0.05	0.565478	0.556794	0.982967
0.1	0.567454	0.549878	0.863467
0.15	0.567989	0.541095	0.76865
0.2	0.567186	0.53031	0.688837
0.25	0.565152	0.517353	0.620097
0.3	0.561998	0.501979	0.560465
0.325	0.560037	0.493268	0.533735
0.35	0.557839	0.483774	0.508992

*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

ε	1	2	3
0.375	0.55542	0.473368	0.486262
0.4	0.552795	0.461801	0.465708
0.425	0.54998		
0.45	0.54699		
0.5	0.540551		
0.6	0.5263		
0.7	0.511126		
0.8	0.496133		
0.9	0.482422		
1	0.471055		

ε	4	5	6
0	0.561959	0.561959	1.2
-0.002	0.562131	0.561785	1.17382
-0.004	0.5623	0.561608	1.15854
-0.006	0.562466	0.561428	1.14577
-0.008	0.56263	0.561246	1.13442
-0.01	0.562791	0.561061	1.12402
-0.02	0.563558	0.560096	1.08022
-0.03	0.564261	0.559064	1.04397
-0.04	0.564901	0.557964	1.012
-0.05	0.565478	0.556794	0.982967
-0.1	0.567454	0.549878	0.863467
-0.15	0.567989	0.541095	0.76865
-0.2	0.567186	0.53031	0.688837
-0.25	0.565152	0.517353	0.620097
-0.3	0.561998	0.501979	0.560465
-0.325	0.560037	0.493268	0.533735
-0.35	0.557839	0.483774	0.508992
-0.375	0.55542	0.473368	0.486262
-0.4	0.552795	0.461801	0.465708
-0.425	0.54998		
-0.45	0.54699		
-0.5	0.540551		
-0.6	0.5263		
-0.7	0.511126		
-0.8	0.496133		
-0.9	0.482422		
-1	0.471055		



Σχήμα 3.39. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.20$ .

$\beta=0.35$	$\alpha=0$
--------------	------------

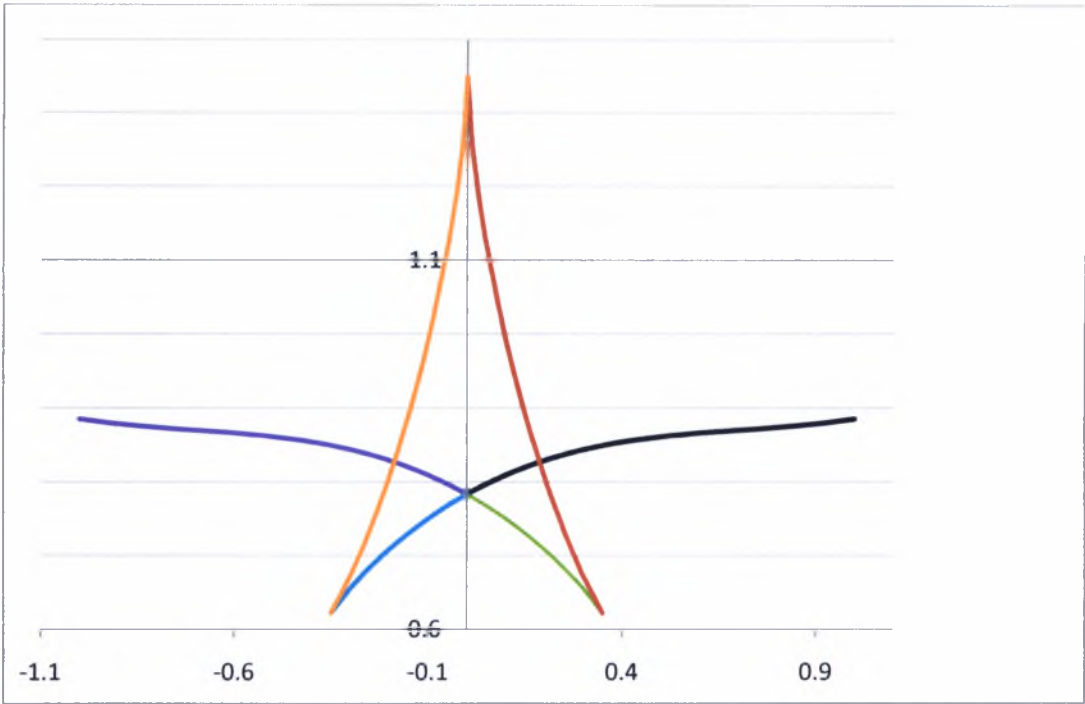
$\epsilon$	1	2	3
0	0.783364	0.783364	1.35
0.01	0.786272	0.780386	1.26929
0.02	0.789108	0.777334	1.22273
0.03	0.791875	0.774208	1.1842
0.04	0.794574	0.771007	1.15022
0.05	0.797205	0.76773	1.11934
0.1	0.809384	0.750153	0.992285
0.15	0.820026	0.730452	0.891565
0.2	0.829249	0.708387	0.807012
0.22	0.832567	0.698826	0.776731
0.25	0.837172	0.6836	0.73463
0.26	0.838611	0.678268	0.721437
0.27	0.840003	0.672796	0.708651
0.28	0.841351	0.667174	0.696271
0.29	0.842654	0.661393	0.684295

*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

<b>ε</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
0.3	0.843913	0.655437	0.672728
0.35	0.849594	0.621875	0.621883
0.4	0.854337		
0.5	0.861513		
0.6	0.866476		
0.7	0.870291		
0.8	0.874032		
0.9	0.878761		
1	0.885496		

<b>ε</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
0	0.783364	0.783364	1.35
-0.01	0.786272	0.780386	1.26929
-0.02	0.789108	0.777334	1.22273
-0.03	0.791875	0.774208	1.1842
-0.04	0.794574	0.771007	1.15022
-0.05	0.797205	0.76773	1.11934
-0.1	0.809384	0.750153	0.992285
-0.15	0.820026	0.730452	0.891565
-0.2	0.829249	0.708387	0.807012
-0.22	0.832567	0.698826	0.776731
-0.25	0.837172	0.6836	0.73463
-0.26	0.838611	0.678268	0.721437
-0.27	0.840003	0.672796	0.708651
-0.28	0.841351	0.667174	0.696271
-0.29	0.842654	0.661393	0.684295
-0.3	0.843913	0.655437	0.672728
-0.35	0.849594	0.621875	0.621883
-0.4	0.854337		
-0.5	0.861513		
-0.6	0.866476		
-0.7	0.870291		
-0.8	0.874032		
-0.9	0.878761		
-1	0.885496		



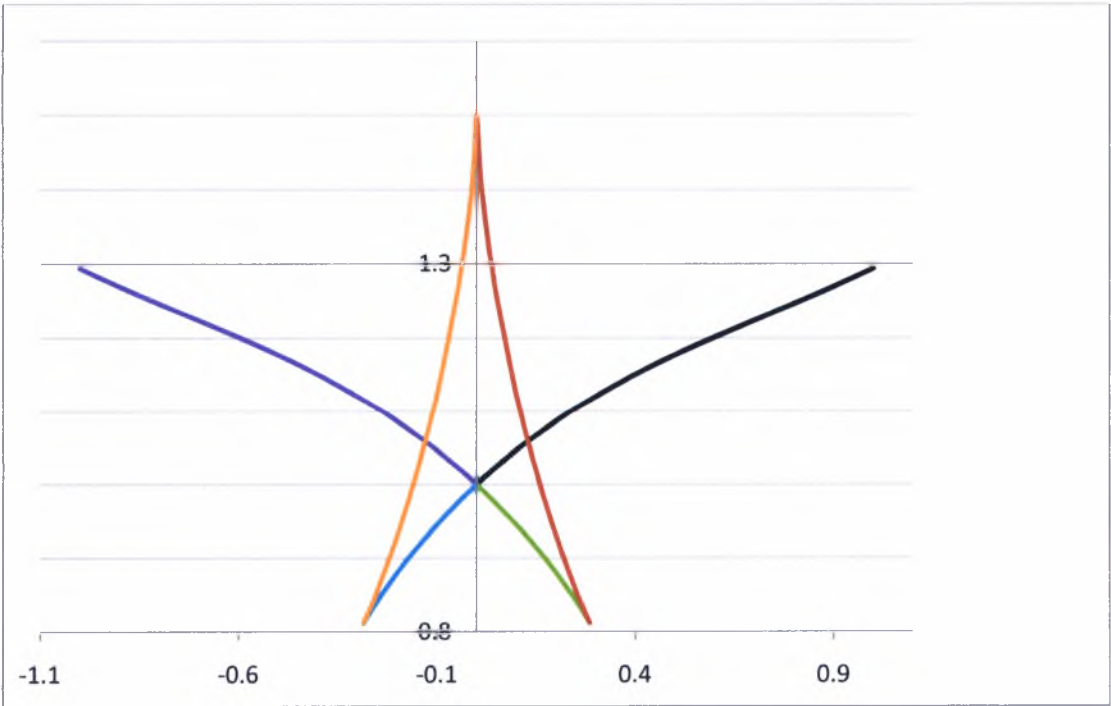


Σχήμα 3.40. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.35$ .

$\beta=0.5$	$\alpha=0$
-------------	------------

$\epsilon$	1	2	3
0	1	1	1.5
0.01	1.00501	0.994909	1.41507
0.02	1.00994	0.989736	1.36607
0.03	1.0148	0.98448	1.32552
0.04	1.01958	0.979138	1.28976
0.05	1.02428	0.973709	1.25728
0.1	1.04674	0.945187	1.12372
0.15	1.06752	0.914129	1.01816
0.2	1.08678	0.880066	0.930125
0.25	1.10465	0.842095	0.855943
0.275	1.1131	0.820946	0.82393
0.285	1.1164	0.811791	0.812291
0.3	1.12125		
0.4	1.15119		
0.5	1.17763		
0.6	1.20162		
0.7	1.22422		
0.8	1.24646		
0.9	1.2694		
1	1.294		

$\epsilon$	4	5	6
0	1	1	1.5
-0.01	1.00501	0.994909	1.41507
-0.02	1.00994	0.989736	1.36607
-0.03	1.0148	0.98448	1.32552
-0.04	1.01958	0.979138	1.28976
-0.05	1.02428	0.973709	1.25728
-0.1	1.04674	0.945187	1.12372
-0.15	1.06752	0.914129	1.01816
-0.2	1.08678	0.880066	0.930125
-0.25	1.10465	0.842095	0.855943
-0.275	1.1131	0.820946	0.82393
-0.285	1.1164	0.811791	0.812291
-0.3	1.12125		
-0.4	1.15119		
-0.5	1.17763		
-0.6	1.20162		
-0.7	1.22422		
-0.8	1.24646		
-0.9	1.2694		
-1	1.294		

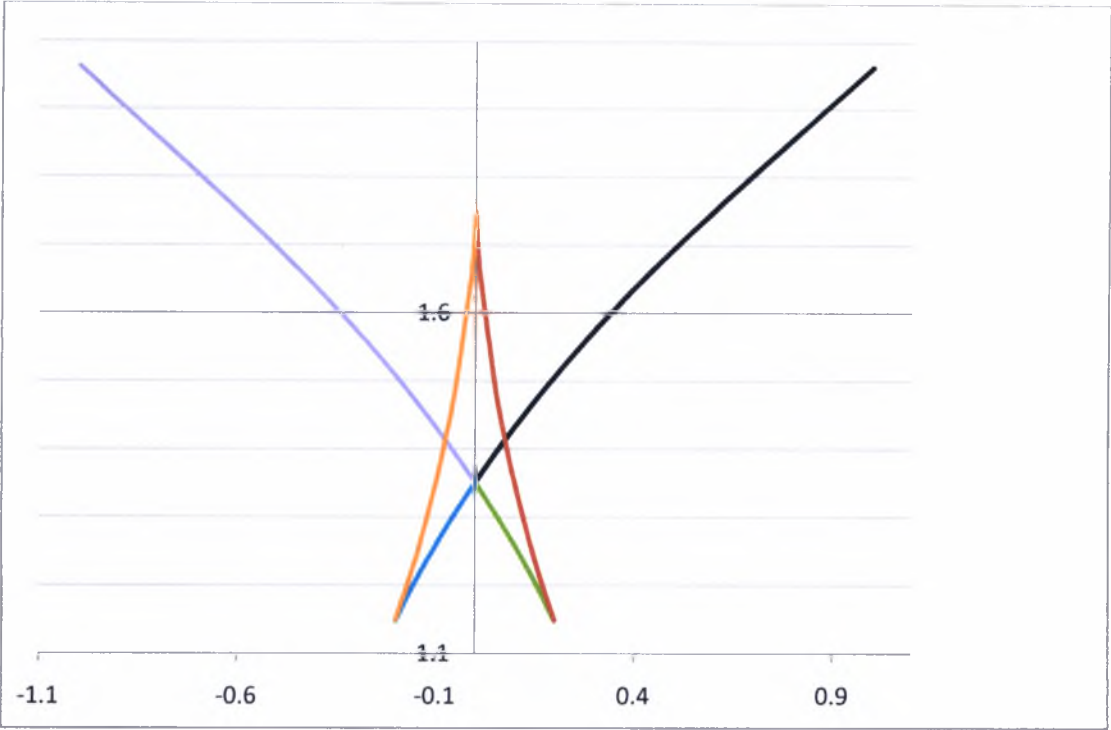


Σχήμα 3.41. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.50$ .

Ν. Κέφου  
Μεταπτυχιακή εργασία

$\beta=0.75$	$\alpha=0$		
$\epsilon$	1	2	3
0	1.35074	1.35074	1.75
0.002	1.35248	1.34901	1.7187
0.004	1.3542	1.34727	1.70042
0.006	1.35592	1.34553	1.68515
0.008	1.35764	1.34378	1.67158
0.01	1.35936	1.34203	1.65914
0.05	1.39284	1.30606	1.49062
0.075	1.41303	1.2826	1.4145
0.1	1.43268	1.25829	1.34876
0.15	1.47053	1.20654	1.23814
0.2	1.5066	1.14843	1.14945
0.25	1.54105		
0.3	1.57407		
0.4	1.63637		
0.5	1.69466		
0.6	1.75002		
0.7	1.80352		
0.8	1.85619		
0.9	1.90902		
1	1.96295		

$\epsilon$	4	5	6
0	1.35074	1.35074	1.75
-0.002	1.35248	1.34901	1.7187
-0.004	1.3542	1.34727	1.70042
-0.006	1.35592	1.34553	1.68515
-0.008	1.35764	1.34378	1.67158
-0.01	1.35936	1.34203	1.65914
-0.05	1.39284	1.30606	1.49062
-0.075	1.41303	1.2826	1.4145
-0.1	1.43268	1.25829	1.34876
-0.15	1.47053	1.20654	1.23814
-0.2	1.5066	1.14843	1.14945
-0.25	1.54105		
-0.3	1.57407		
-0.4	1.63637		
-0.5	1.69466		
-0.6	1.75002		
-0.7	1.80352		
-0.8	1.85619		
-0.9	1.90902		
-1	1.96295		



Σχήμα 3.42. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=0.75$ .

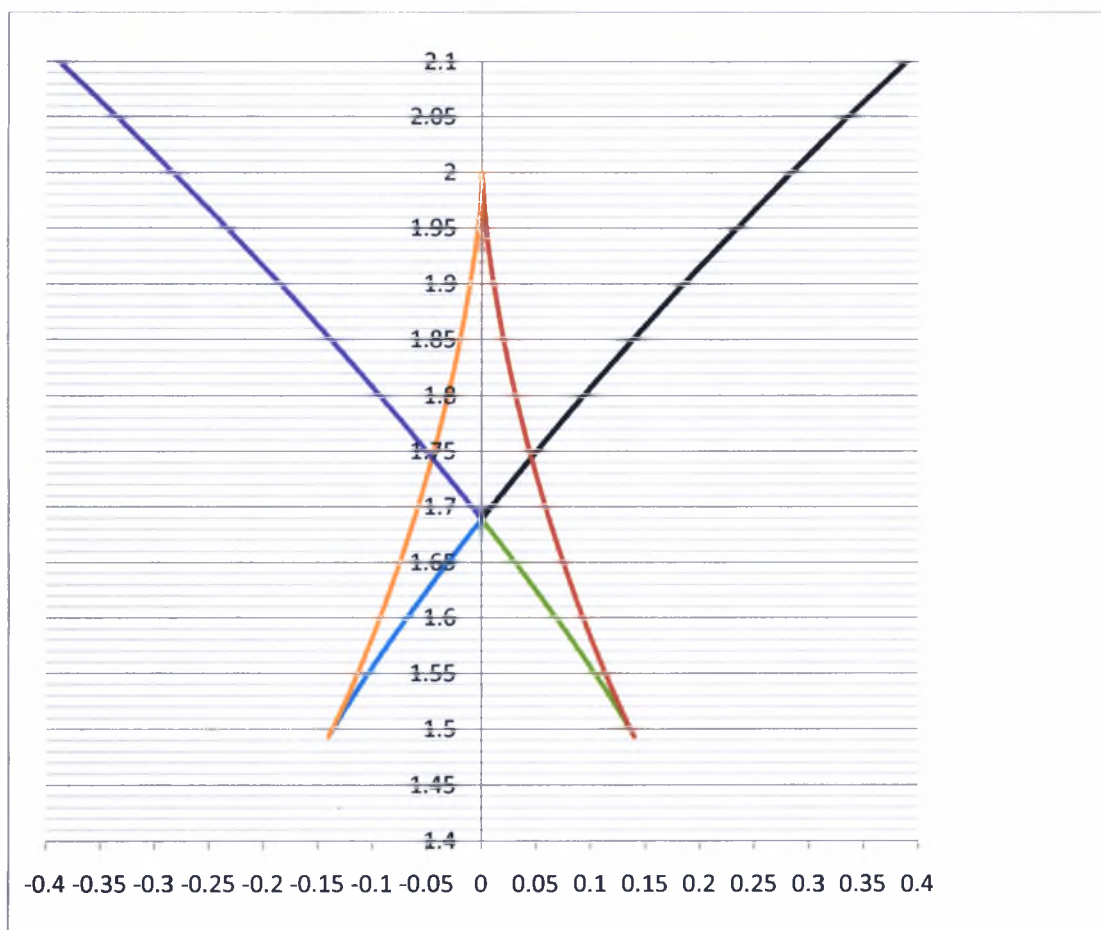
$\beta=1$	$\alpha=0$
-----------	------------

$\epsilon$	1	2	3
0	1.68901	1.68901	2
0.0025	1.69212	1.68589	1.96186
0.005	1.69523	1.68276	1.93962
0.0075	1.69832	1.67962	1.92107
0.01	1.70141	1.67647	1.90459
0.02	1.71367	1.66377	1.84968
0.03	1.7258	1.65091	1.80436
0.04	1.7378	1.63789	1.76451
0.05	1.74968	1.62468	1.72843
0.06	1.76144	1.61127	1.69522
0.07	1.77309	1.59766	1.66432
0.08	1.78463	1.58381	1.63536
0.09	1.79606	1.5697	1.6081
0.095	1.80174	1.56254	1.59505
0.1	1.8074	1.55531	1.58236
0.11	1.81863	1.54058	1.55803
0.12	1.82976	1.52544	1.53506
0.13	1.8408	1.50978	1.51347
0.14	1.85175	1.4933	1.49347

*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

$\varepsilon$	1	2	3
0.15	1.86261		
0.2	1.91566		
0.3	2.01626		
0.4	2.11084		
0.5	2.20073		
0.6	2.28714		
0.7	2.37116		
0.8	2.45383		
0.9	2.53613		
1	2.61897		

$\varepsilon$	4	5	6
0	1.68901	1.68901	2
-0.0025	1.69212	1.68589	1.96186
-0.005	1.69523	1.68276	1.93962
-0.0075	1.69832	1.67962	1.92107
-0.01	1.70141	1.67647	1.90459
-0.02	1.71367	1.66377	1.84968
-0.03	1.7258	1.65091	1.80436
-0.04	1.7378	1.63789	1.76451
-0.05	1.74968	1.62468	1.72843
-0.06	1.76144	1.61127	1.69522
-0.07	1.77309	1.59766	1.66432
-0.08	1.78463	1.58381	1.63536
-0.09	1.79606	1.5697	1.6081
-0.095	1.80174	1.56254	1.59505
-0.1	1.8074	1.55531	1.58236
-0.11	1.81863	1.54058	1.55803
-0.12	1.82976	1.52544	1.53506
-0.13	1.8408	1.50978	1.51347
-0.14	1.85175	1.4933	1.49347
-0.15	1.86261		
-0.2	1.91566		
-0.3	2.01626		
-0.4	2.11084		
-0.5	2.20073		
-0.6	2.28714		
-0.7	2.37116		
-0.8	2.45383		
-0.9	2.53613		
-1	2.61897		



Σχήμα 3.43. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_s$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.00$ .

$\beta=1.5$	$\alpha=0$
-------------	------------

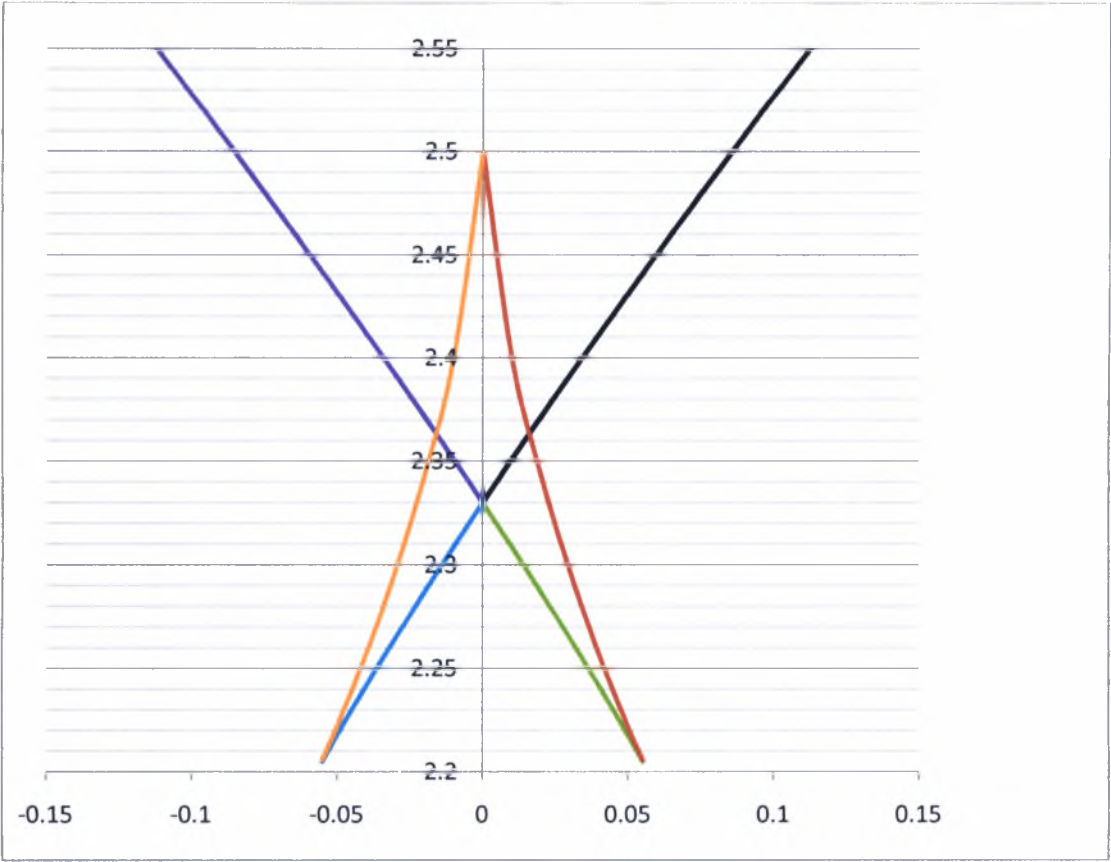
$\epsilon$	s	$\lambda_{s1}$	$\lambda_s$
0	2.32998	2.32998	2.5
0.01	2.35093	2.30865	2.39997
0.02	2.37154	2.28687	2.34312
0.03	2.39184	2.26454	2.29683
0.04	2.41186	2.24153	2.25688
0.05	2.43164	2.21756	2.22174
0.055	2.44143	2.20499	2.20586
0.06	2.45117		
0.07	2.47049		
0.08	2.4896		
0.09	2.50853		
0.1	2.52727		
0.15	2.61856		



*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

$\epsilon$	s	$\lambda s1$	$\lambda s$
0.2	2.70642		
0.25	2.79144		
0.3	2.87403		
0.35	2.95454		
0.4	3.03322		
0.45	3.1103		
0.5	3.18598		
0.55	3.26045		
0.6	3.33387		
0.7	3.47817		
0.8	3.61999		
0.9	3.76035		
1	3.90014		

$\epsilon$	s	$\lambda s1$	$\lambda s$
0	2.32998	2.32998	2.5
-0.01	2.35093	2.30865	2.39997
-0.02	2.37154	2.28687	2.34312
-0.03	2.39184	2.26454	2.29683
-0.04	2.41186	2.24153	2.25688
-0.05	2.43164	2.21756	2.22174
-0.055	2.44143	2.20499	2.20586
-0.06	2.45117		
-0.07	2.47049		
-0.08	2.4896		
-0.09	2.50853		
-0.1	2.52727		
-0.15	2.61856		
-0.2	2.70642		
-0.25	2.79144		
-0.3	2.87403		
-0.35	2.95454		
-0.4	3.03322		
-0.45	3.1103		
-0.5	3.18598		
-0.55	3.26045		
-0.6	3.33387		
-0.7	3.47817		
-0.8	3.61999		
-0.9	3.76035		
-1	3.90014		

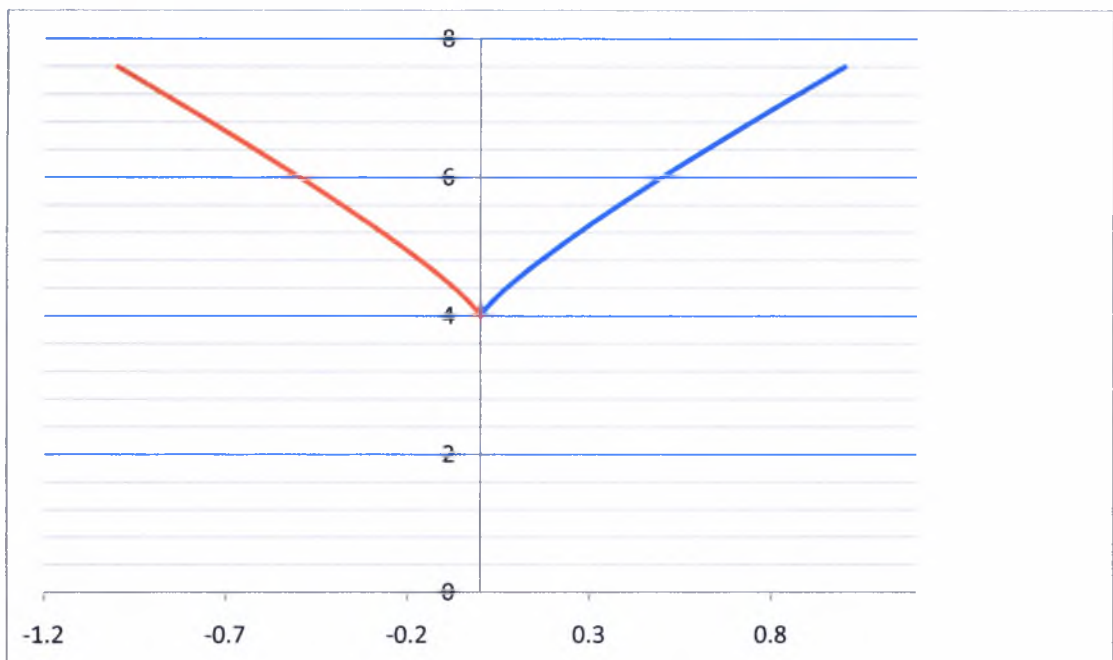


Σχήμα 3.44. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=1.50$ .

$\beta=3$	$\alpha=0$
-----------	------------

$\epsilon$	$s$
0	4
0.01	4.0813
0.05	4.301
0.1	4.5312
0.2	4.94036
0.3	5.3153
0.4	5.67001
0.5	6.01072
0.6	6.34105
0.7	6.66343
0.8	6.97968
0.9	7.29119
1	7.59913

$\epsilon$	$s$
0	4
-0.01	4.0813
-0.05	4.301
-0.1	4.5312
-0.2	4.94036
-0.3	5.3153
-0.4	5.67001
-0.5	6.01072
-0.6	6.34105
-0.7	6.66343
-0.8	6.97968
-0.9	7.29119
-1	7.59913



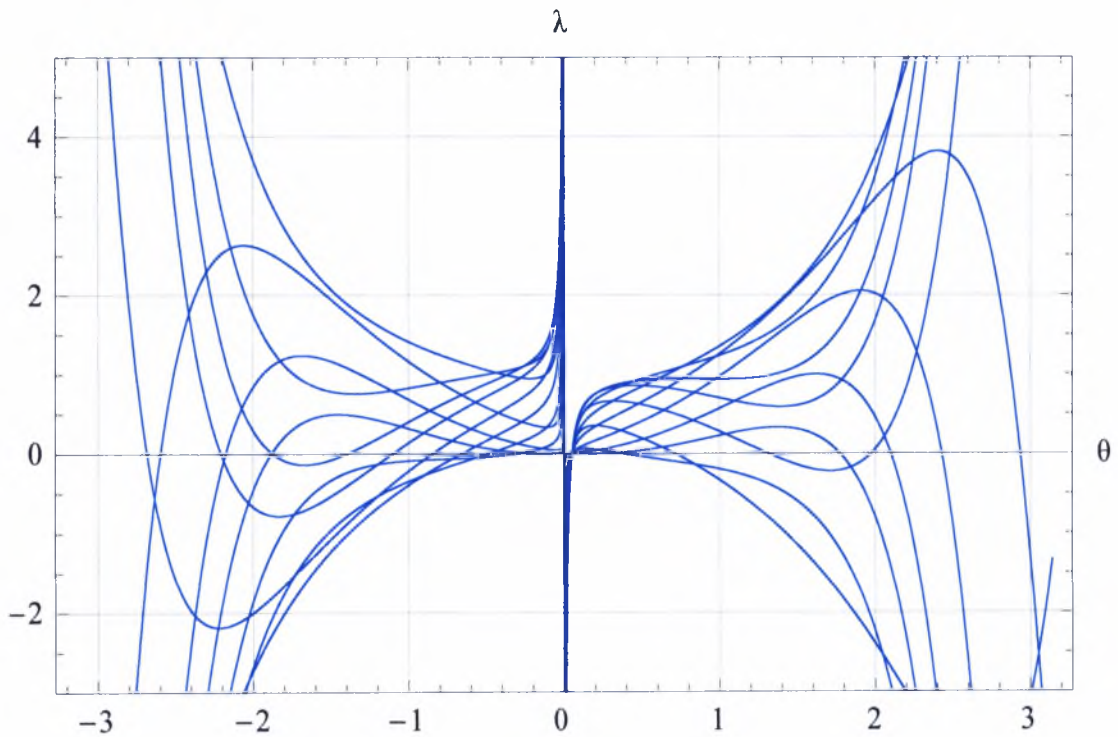
Σχήμα 3.45. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) του ατελούς συστήματος με οριζόντιο ελατήριο για  $\beta=3.00$ .

Η μορφή των παραπάνω διαγραμμάτων προσομοιάζει έντονα τα κλασσικά διαγράμματα της *ανωμαλίας τύπου χελιδονοσουράς*.

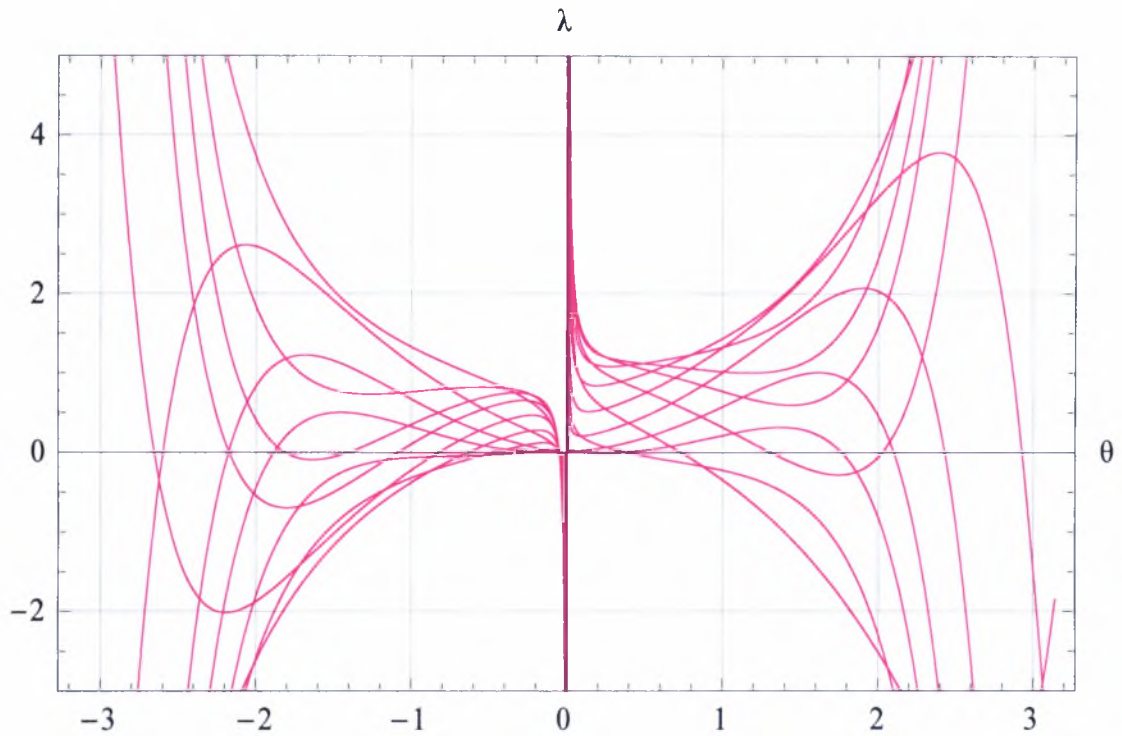
3.7.3. Το ατελές σύστημα με μεταβλητή γωνιά εκτατικού ελατηρίου και άρθρωση στη βάση ( $a, \varepsilon \neq 0, \beta=0$ )

Πρόκειται για ουσιαστική διαταραχή του τέλει συστήματος που αναλύθηκε στην §3.6.3. Για το υπό εξέταση ατελές σύστημα, το συνολικό δυναμικό, ο δρόμος ισορροπίας και η 2η μεταβολή του  $V$  στα σημεία ισορροπίας δίδονται στο Παράρτημα.

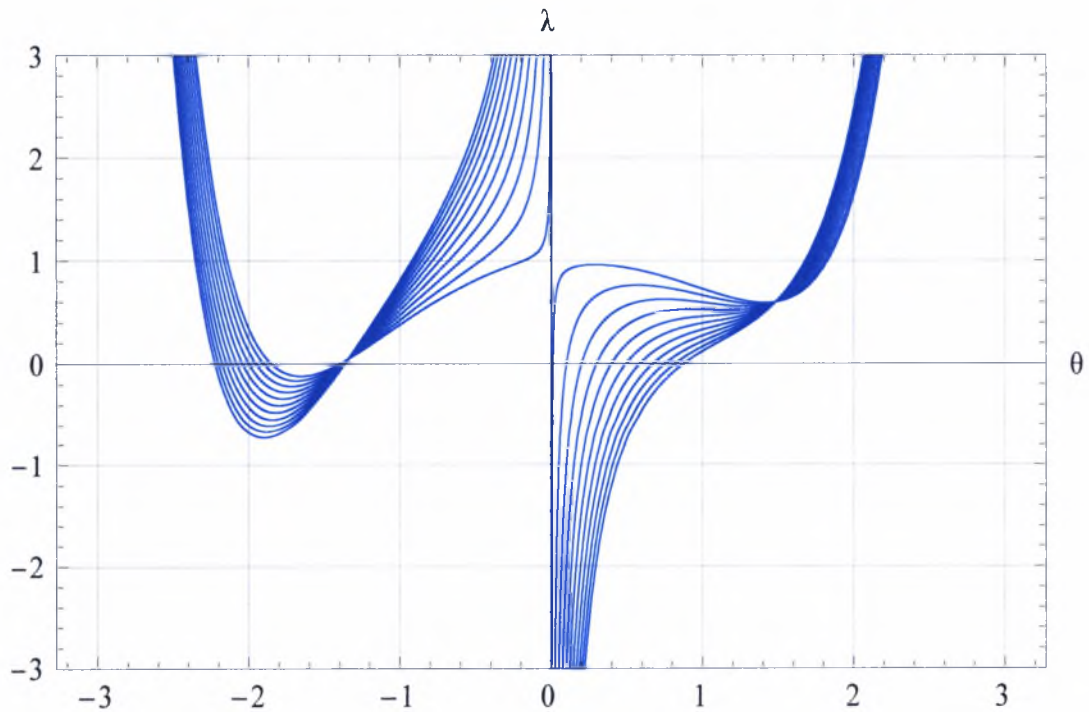
Στα επόμενα γραφήματα απεικονίζονται οι δρόμοι ισορροπίας του συστήματος για μικρή (τόσο θετική όσο και αρνητική) αρχική ατέλεια και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$ .



Σχήμα 3.46. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0, \varepsilon=0.05$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$ .

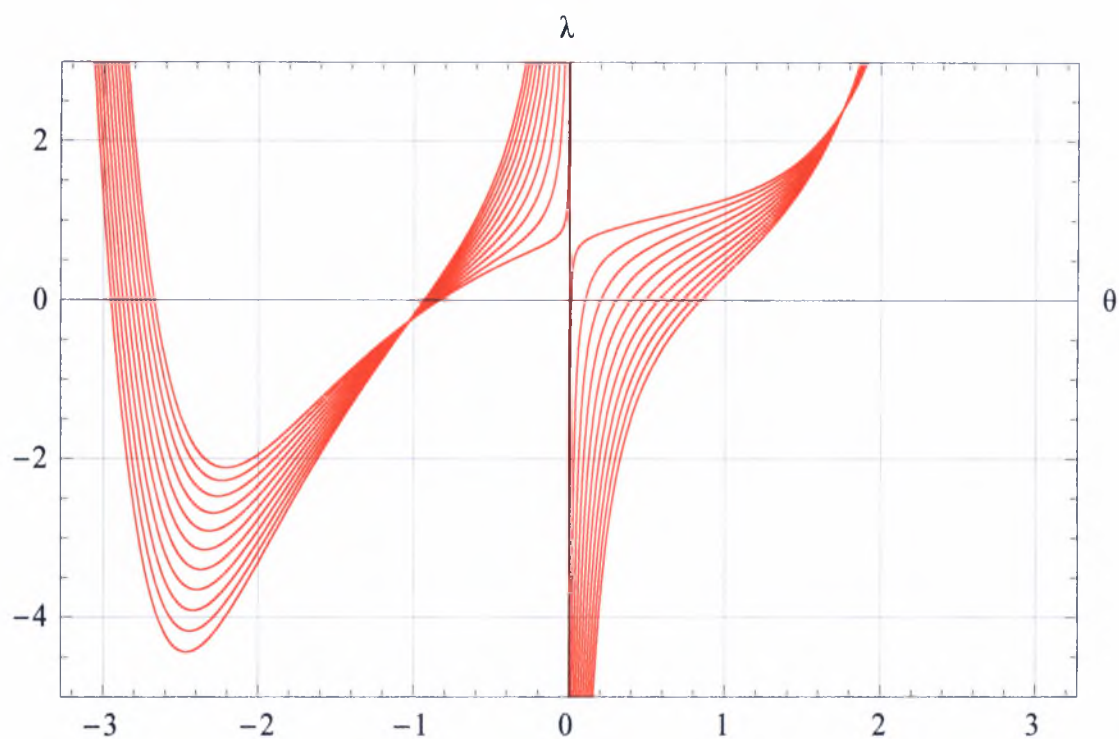


Σχήμα 3.47. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $\varepsilon=-0.05$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$ .

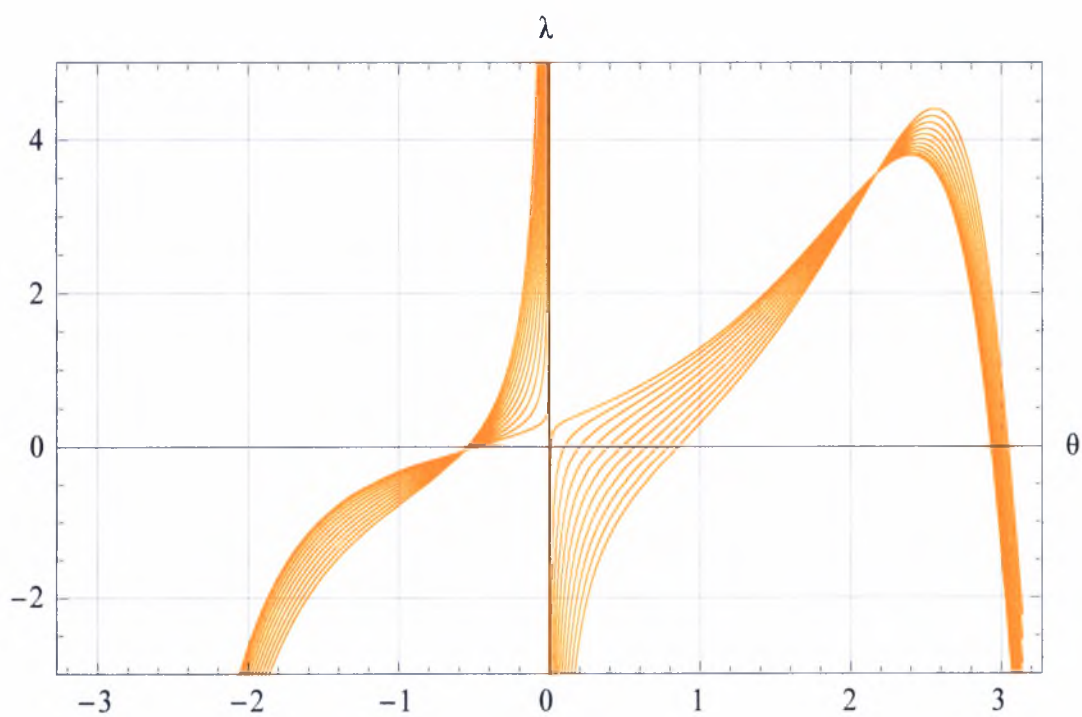


Σχήμα 3.48. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $a=0.1$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\varepsilon$ .



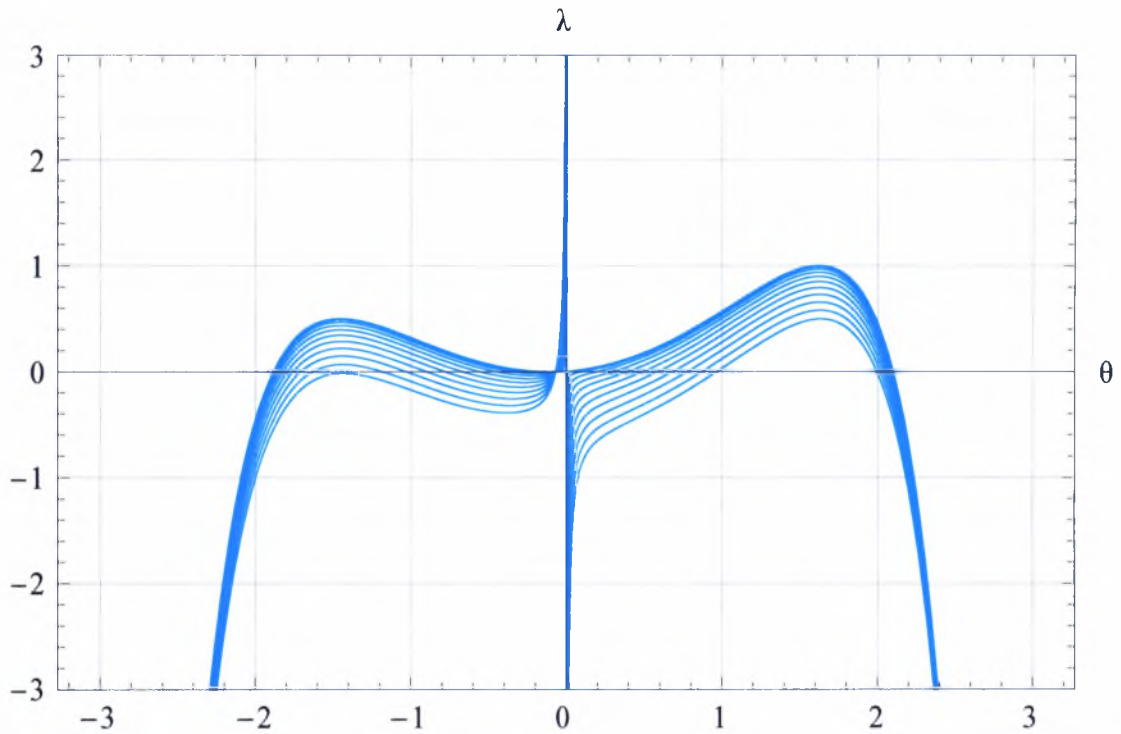


Σχήμα 3.49. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $a=0.5$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\epsilon$ .

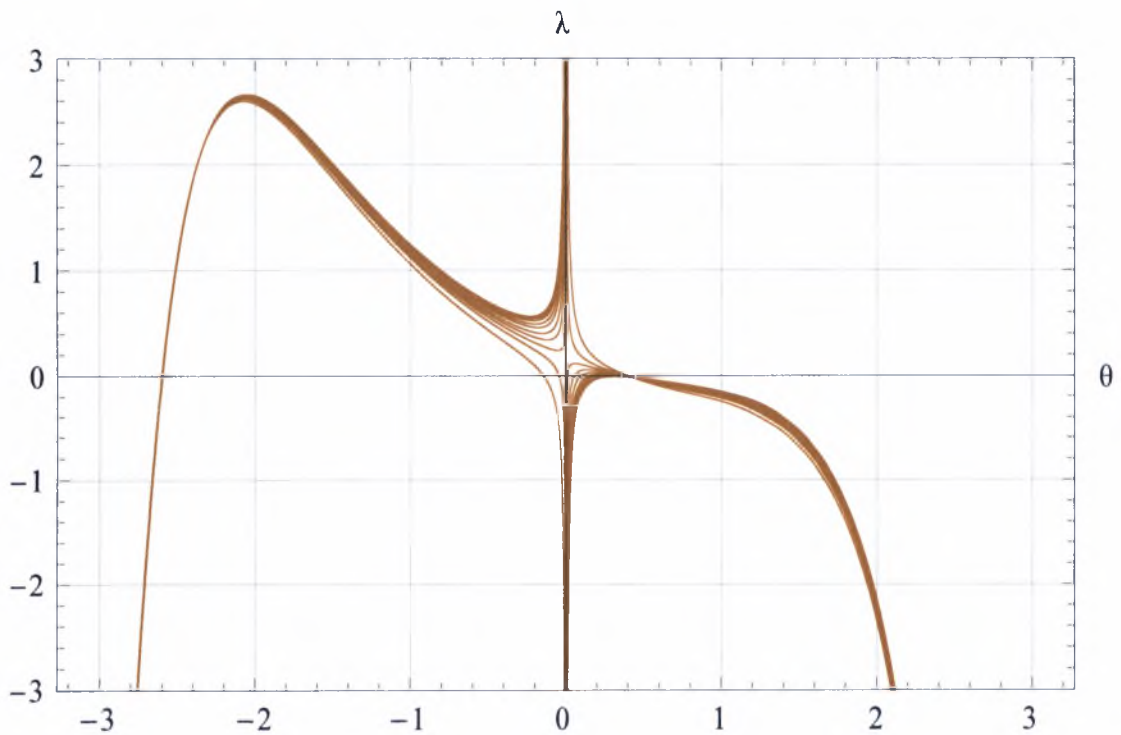


Σχήμα 3.50. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $a=1.0$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\epsilon$ .

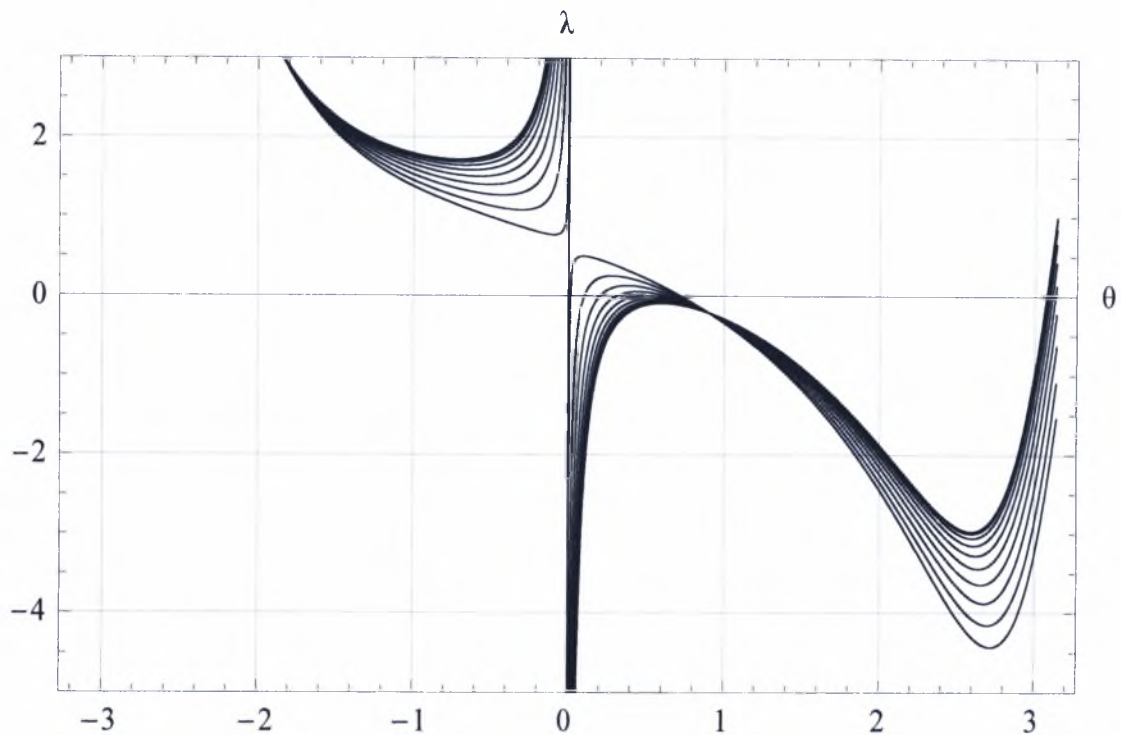




Σχήμα 3.51. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $\alpha=1.5$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\epsilon$ .



Σχήμα 3.52. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $\alpha=2.0$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\epsilon$ .



Σχήμα 3.53. Δρόμοι ισορροπίας του συστήματος με  $\beta=0$ ,  $\alpha=2.5$  και διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\varepsilon$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζονται πίνακες με τα στοιχεία των κρίσιμων σημείων του συστήματος των παραπάνω περιπτώσεων καθώς και τα σχετικά διαγράμματα διαταραγμένων διακλαδώσεων για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  που θα σχολιαστούν κατόπιν.

$\alpha=0.1$	$\beta=0$
--------------	-----------

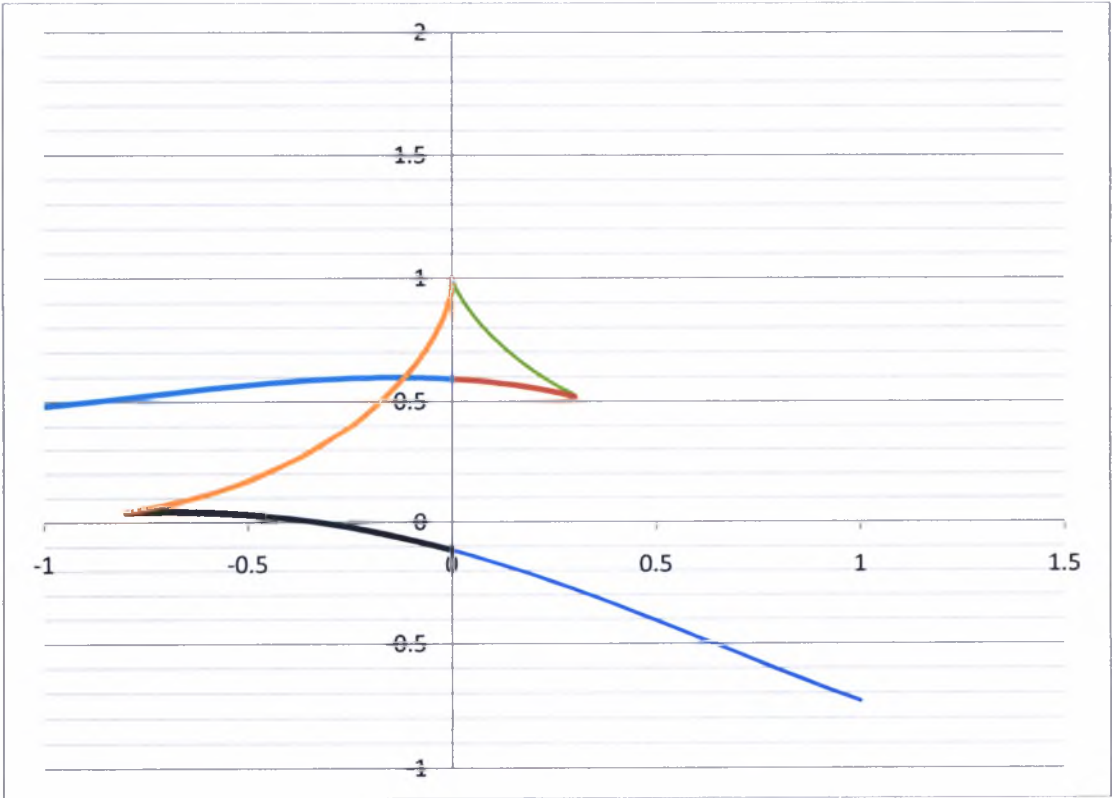
$\varepsilon$	$s$	$\lambda s1$	$\lambda s$	$C$
0	-0.115109	1.00147	0.591014	0.990033
0.0001	-0.115155	1.00084	0.591005	
0.0002	-0.115201	1.00021	0.590995	
0.0003	-0.115247	0.999607	0.590985	
0.0004	-0.115293	0.999012	0.5909975	
0.0005	-0.115339	0.998428	0.590965	
0.002	-0.11603	0.990551	0.590816	
0.004	-0.116953	0.9815	0.590615	
0.006	-0.117879	0.973368	0.590412	
0.008	-0.118807	0.965843	0.590205	
0.01	-0.119738	0.958766	0.589995	
0.015	-0.122074	0.942483	0.589457	
0.02	-0.124426	0.927641	0.588899	
0.025	-0.126792	0.913836	0.588323	

*N. Κέφου*  
*Μεταλλοχητική εργασία*

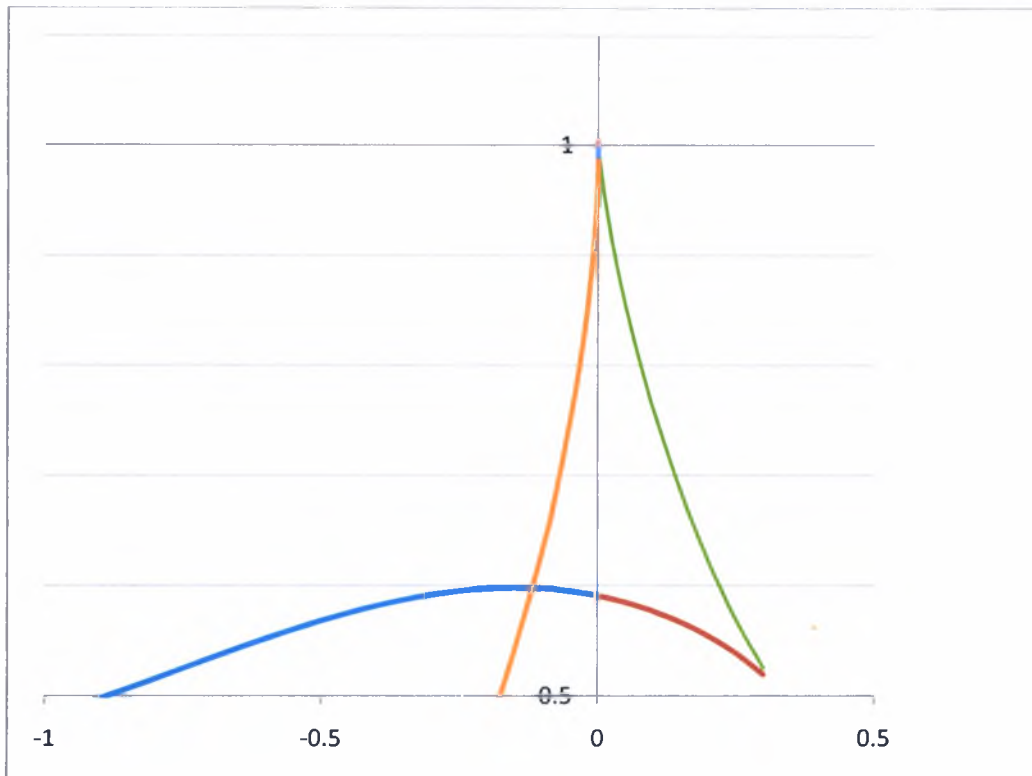
ε	s	λs1	λs	C
0.03	-0.129173	0.900838	0.587728	
0.035	-0.131569	0.888493	0.587112	
0.04	-0.13398	0.876698	0.586478	
0.045	-0.136405	0.865376	0.585823	
0.05	-0.138844	0.854466	0.585148	
0.06	-0.143767	0.833713	0.583739	
0.07	-0.148746	0.814164	0.582247	
0.075	-0.151257	0.80478	0.58147	
0.08	-0.153782	0.795631	0.580671	
0.09	-0.158874	0.777976	0.579011	
0.1	-0.164021	0.761097	0.577264	
0.15	-0.190562	0.686013	0.56716	
0.2	-0.218382	0.622983	0.554558	
0.25	-0.247382	0.569635	0.539006	
0.3	-0.277454	0.525389	0.519543	
0.35	-0.308481			
0.4	-0.340337			
0.45	-0.372885			
0.5	-0.405981			
0.55	-0.439475			
0.6	-0.473208			
0.65	-0.507016			
0.7	-0.54073			
0.75	-0.574179			
0.8	-0.607186			
0.85	-0.639576			
0.9	-0.671173			
0.95	-0.7018			
1	-0.731285			

ε	1	2	3	4	5
0	-0.115109	0.591014	0.990033	0.990033	1.00147
-0.0001	-0.115063	0.591024	0.98206	0.997365	1.00213
-0.0002	-0.115017	0.591034	0.978604	1.00016	1.00281
-0.0003	-0.114971	0.591044	0.975897	1.00217	1.00351
-0.0004	-0.114925	0.591054	0.97358	1.00376	1.00426
-0.0005	-0.114879	0.591063	0.971513	1.00503	1.00507
-0.0006	-0.114833	0.591073	0.969625		
-0.002	-0.114191	0.591209	0.950902		
-0.004	-0.113275	0.591401	0.932631		
-0.006	-0.112361	0.591591	0.918003		
-0.008	-0.11145	0.591777	0.905313		

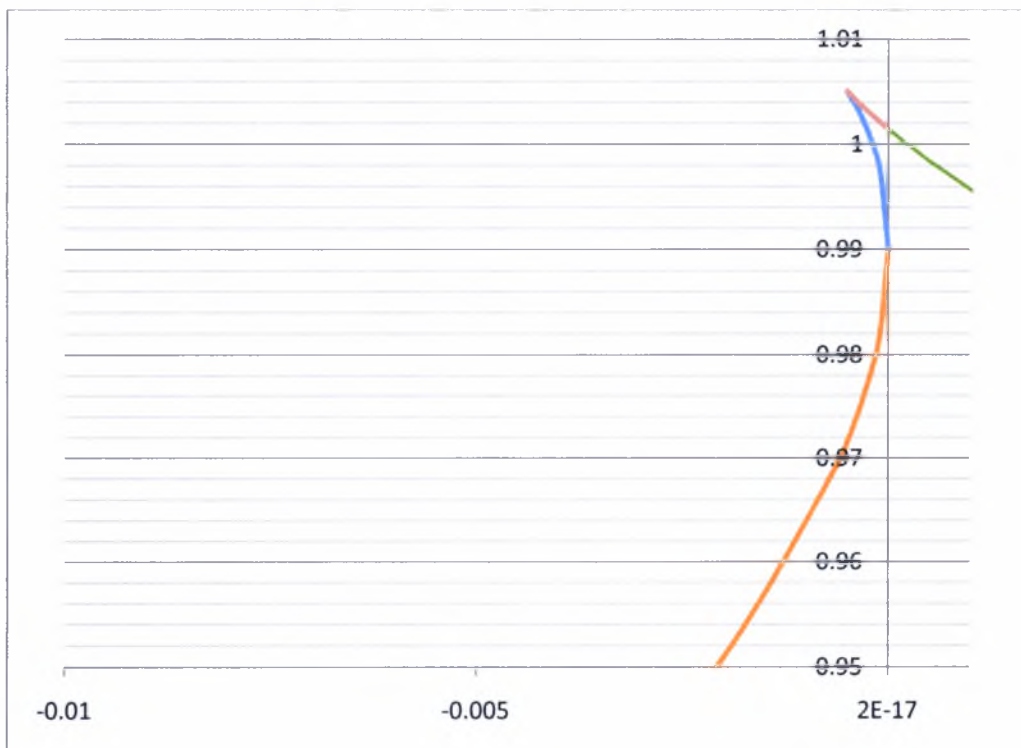
$\epsilon$	1	2	3	4	5
-0.01	-0.110541	0.59196	0.893887		
-0.015	-0.10828	0.592405	0.868884		
-0.02	-0.106034	0.592832	0.847173		
-0.025	-0.103803	0.593241	0.82763		
-0.03	-0.101588	0.593632	0.809668		
-0.035	-0.0993884	0.594006	0.792929		
-0.04	-0.097204	0.594362	0.777178		
-0.045	-0.0950352	0.5947	0.762251		
-0.05	-0.092882	0.5950212	0.748025		
-0.1	-0.072219	0.597306	0.630576		
-0.2	-0.0357492	0.597205	0.463228		
-0.3	-0.00594283	0.59166	0.34075		
-0.4	0.0171116	0.581603	0.246104		
-0.5	0.0334507	0.567985	0.172235		
-0.6	0.0431898	0.551785	0.115316		
-0.7	0.0464038	0.533997	0.0730469		
-0.8	0.0425777	0.515609	0.0445078		
-0.9		0.497583			
-1		0.480822			



Σχήμα 3.54. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) για  $a=0.10$ .



Σχήμα 3.55. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων για  $a=0.10$ .



Σχήμα 3.56. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων για  $a=0.10$ .

$\alpha=0.25$	$\beta=0$
---------------	-----------

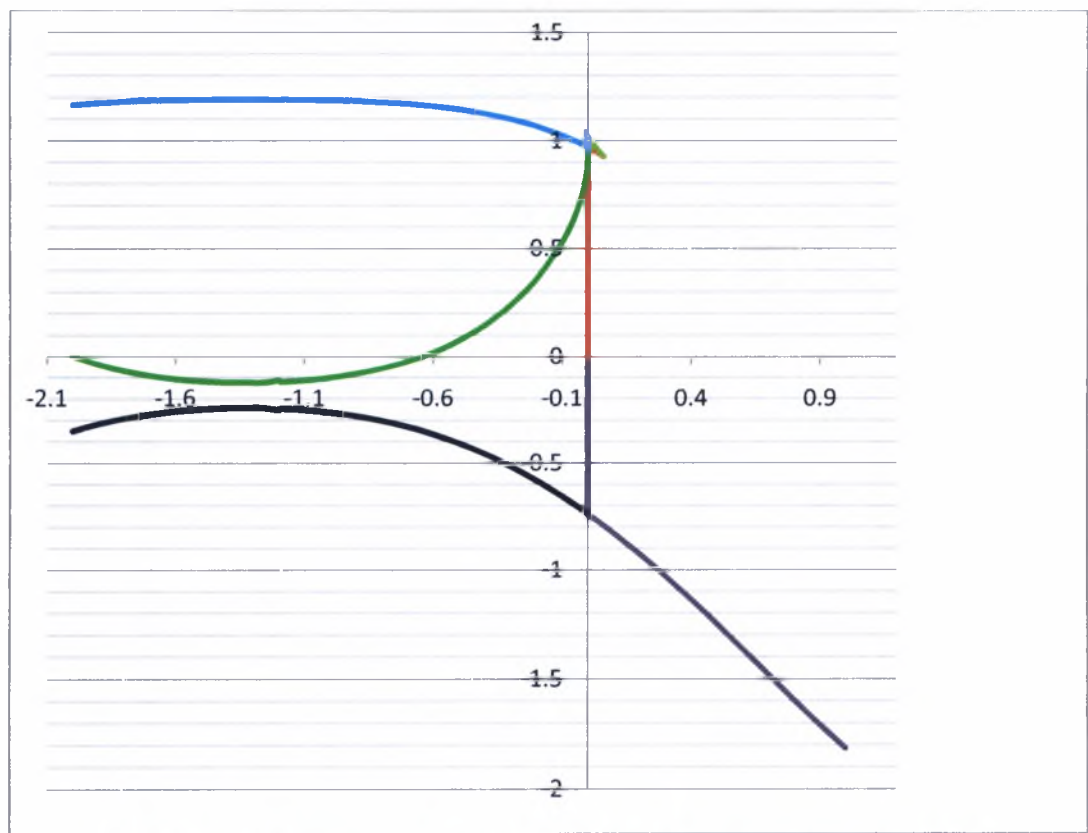
$\varepsilon$	6	7	8
0	-0.737757	0.969763	1.01916
0.0001	-0.737843	0.969699	1.01896
0.0002	-0.73793	0.969636	1.01875
0.0003	-0.738016	0.969572	1.01855
0.0004	-0.738102	0.969509	1.01835
0.0005	-0.738189	0.969445	1.01814
0.0006	-0.738275	0.969382	1.017940
0.0007	-0.738361	0.969318	1.017740
0.0008	-0.738448	0.969255	1.017540
0.0009	-0.738534	0.969191	1.017340
0.001	-0.738620	0.969128	1.017130
0.002	-0.739484	0.968490	1.015140
0.003	-0.740349	0.967851	1.013170
0.004	-0.741214	0.967209	1.01124
0.005	-0.742081	0.966566	1.00933
0.006	-0.742948	0.96592	1.00744
0.007	-0.743815	0.965272	1.00558
0.008	-0.744684	0.964621	1.00374
0.009	-0.745553	0.963969	1.00192
0.01	-0.746423	0.963314	1.00012
0.02	-0.755165	0.956632	0.983152
0.03	-0.763981	0.94969	0.967676
0.04	-0.772873	0.942445	0.953431
0.05	-0.781838	0.934833	0.940294
0.06	-0.790876	0.926733	0.92826
0.07	-0.799988		
0.08	-0.809171		
0.09	-0.818427		
0.1	-0.827753		
0.2	-0.924751		
0.3	-1.02795		
0.4	-1.13633		
0.5	-1.24868		
0.6	-1.36357		
0.7	-1.47942		
0.8	-1.59449		
0.9	-1.70692		
1	-1.8148		



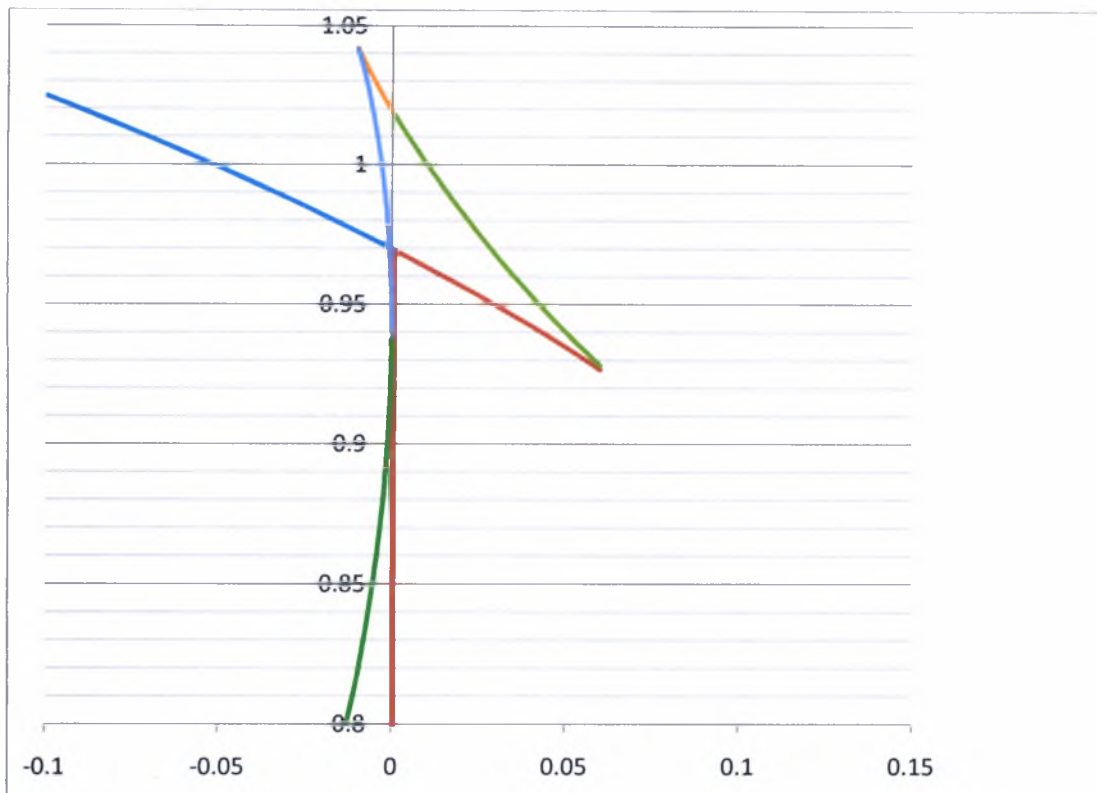
Ν. Κέφου  
Μεταλλοχειρική εργασία

ε	1	2	3	4	5
0	-0.737757	0.969763	1.01916		
-0.000001	-0.737756	0.969763	1.01916	0.939952	0.937628
-0.000005	-0.737753	0.969766	1.01917	0.941385	0.936188
-0.00001	-0.737749	0.969769	1.01918	0.942457	0.935108
-0.00005	-0.737714	0.969794	1.01926	0.946962	0.93053
-0.0001	-0.737671	0.969826	1.01937	0.950318	0.927083
-0.0002	-0.737585	0.96989	1.01957	0.955036	0.922184
-0.0003	-0.737498	0.969953	1.01978	0.958632	0.918406
-0.0004	-0.737412	0.970016	1.01998	0.961647	0.915208
-0.0005	-0.737326	0.97008	1.02019	0.96429	0.912382
-0.0006	-0.73724	0.970143	1.02039	0.966669	0.90982
-0.0007	-0.737153	0.970206	1.0206	0.968848	0.907458
-0.0008	-0.737067	0.970269	1.02081	0.970868	0.905254
-0.0009	-0.736981	0.970333	1.02101	0.972758	0.90318
-0.001	-0.736895	0.970396	1.02122	0.97454	0.901215
-0.002	-0.736033	0.971027	1.02332	0.988673	0.885218
-0.003	-0.735172	0.971656	1.02546	0.999194	0.872795
-0.004	-0.734312	0.972282	1.02764	1.00781	0.862231
-0.005	-0.733453	0.972907	1.02987	1.01519	0.852858
-0.006	-0.732594	0.97353	1.03216	1.02167	0.844336
-0.007	-0.731736	0.974151	1.03451	1.02744	0.836459
-0.008	-0.730879	0.97477	1.03694	1.03262	0.829096
-0.009	-0.730023	0.975386	1.03947	1.03728	0.822154
-0.01	-0.729167	0.976001	1.04213	1.04145	0.815565
-0.02	-0.720654	0.982047			0.761686
-0.03	-0.712218	0.987912			0.719696
-0.04	-0.703859	0.993609			0.684009
-0.05	-0.695578	0.999148			0.652435
-0.06	-0.687375	1.00454			0.62384
-0.07	-0.679251	1.00978			0.597543
-0.08	-0.671206	1.01489			0.573096
-0.09	-0.663241	1.01986			0.550187
-0.1	-0.655354	1.02472			0.528586
-0.2	-0.580928	1.06711			0.358871
-0.3	-0.514666	1.10027			0.238261
-0.4	-0.456572	1.126			0.146402
-0.5	-0.406487	1.14562			0.07483
-0.6	-0.364106	1.16023			0.0188153
-0.7	-0.329002	1.17078			-0.0247551
-0.8	-0.300657	1.17812			-0.0581597
-0.9	-0.278492	1.18301			-0.0831783
-1	-0.261907	1.1861			-0.101243
-1.1	-0.250333	1.18792			-0.113499

$\varepsilon$	1	2	3	4	5
-1.13	-0.247762	1.18829			-0.11618
-1.15	-0.246269	1.18849			-0.117731
-1.17	-0.244948	1.18866			-0.119097
-1.19	-0.243798	1.18881			-0.120284
-1.2	-0.250333	1.18792			-0.113499
-1.25	-0.241347	1.18912			-0.122803
-1.3	-0.240426	1.18923			-0.123745
-1.35	-0.24051	1.18922			-0.123659
-1.4	-0.241601	1.18909			-0.122542
-1.45	-0.243714	1.18882			-0.120371
-1.5	-0.246875	1.18841			-0.117102
-1.55	-0.251125	1.18781			-0.112669
-1.6	-0.256514	1.18699			-0.10699
-1.65	-0.2631	1.1859			-0.0999623
-1.7	-0.270949	1.18448			-0.0914649
-1.75	-0.280132	1.18268			-0.0813608
-1.8	-0.290722	1.18042			-0.0694955
-1.85	-0.302794	1.17761			-0.0556967
-1.9	-0.316424	1.17418			-0.0397732
-1.95	-0.331685	1.17003			-0.021512
-2	-0.348648	1.16506			-0.00067493



Σχήμα 3.57. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\varepsilon, \lambda_{cr}$ ) για  $a=0.25$ .



Σχήμα 3.58. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων για  $\alpha=0.25$ .

$\alpha=1.5$	$\beta=0$
--------------	-----------

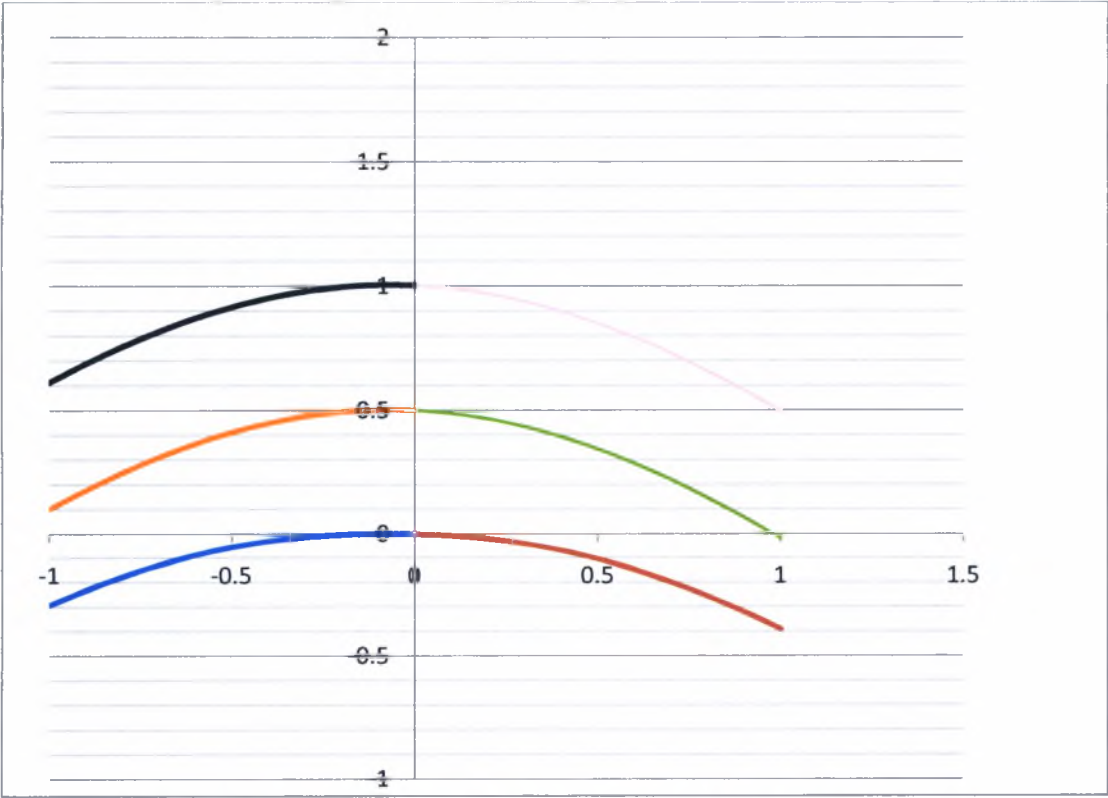
$\varepsilon$	$s$	$\lambda s1$	$\lambda s$
0	1.00213	0.500702	-0.000701164
0.002	1.00199	0.500558	-0.0007512
0.004	1.00185	0.50041	-0.000803397
0.006	1.0017	0.500259	-0.000857782
0.008	1.00155	0.500103	-0.000914379
0.01	1.0014	0.499943	-0.000973213
0.05	0.99747	0.495912	-0.00265182
0.1	0.990385	0.488637	-0.00622893
0.2	0.969032	0.466712	-0.0188659
0.3	0.938292	0.435147	-0.039275
0.4	0.898472	0.39426	-0.0676367
0.5	0.849976	0.344465	-0.103882
0.6	0.79329	0.286263	-0.147771
0.7	0.728986	0.220241	-0.198936
0.8	0.65771	0.147064	-0.256897
0.9	0.580179	0.0674683	-0.321082
1	0.49717	-0.0177455	-0.390836

*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

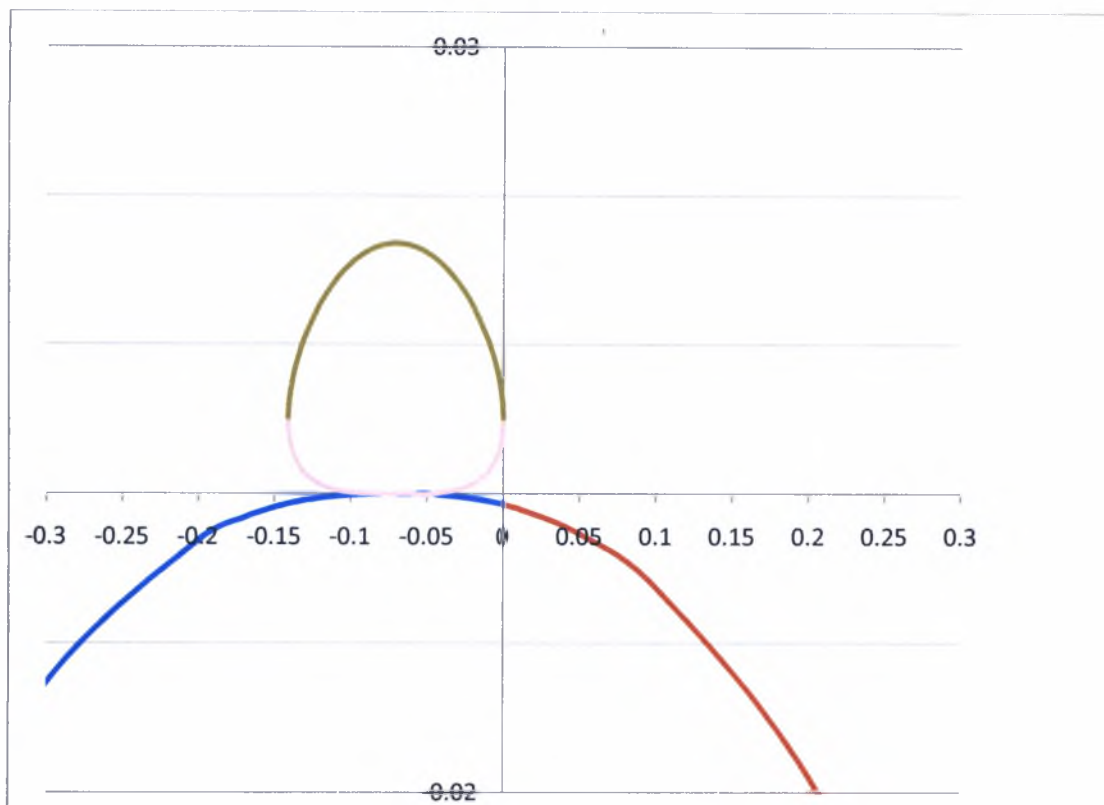
ε	1	2	3	4	5
0	1.00213	0.500702	-0.000701164		
-0.000003	1.00214	0.500702	-0.000701091	0.00490432	0.00506344
-0.000007	1.00214	0.500702	-0.000700993	0.00486273	0.00510578
-0.00002	1.00214	0.500703	-0.000700675	0.00478007	0.00519088
-0.00005	1.00214	0.500705	-0.000699941	0.00466356	0.00531302
-0.0001	1.00214	0.500709	-0.000698718	0.00453384	0.00545213
-0.0002	1.00215	0.500716	-0.000696278	0.00435328	0.00565142
-0.0003	1.00216	0.500723	-0.000693843	0.00421709	0.00580632
-0.0004	1.00216	0.50073	-0.000691414	0.00410388	0.00593822
-0.0005	1.00217	0.500737	-0.00068899	0.00400537	0.00605539
-0.0006	1.00218	0.500744	-0.000686571	0.00391731	0.00616209
-0.0007	1.00218	0.500751	-0.000684157	0.00383718	0.00626083
-0.0008	1.00219	0.500758	-0.000681749	0.00376334	0.00635327
-0.0009	1.0022	0.500765	-0.000679346	0.00369463	0.00644054
-0.001	1.0022	0.500772	-0.000676948	0.00363022	0.00652349
-0.002	1.00227	0.500842	-0.000653262	0.00313139	0.00720637
-0.003	1.00234	0.50091	-0.000630103	0.00277451	0.00774481
-0.004	1.0024	0.500977	-0.000607467	0.00249148	0.00820696
-0.005	1.00247	0.501044	-0.000585351	0.00225577	0.00861929
-0.006	1.00253	0.501109	-0.00056375	0.00205375	0.00899547
-0.007	1.00259	0.501173	-0.000542661	0.00187728	0.00934362
-0.008	1.00266	0.501237	-0.000522081	0.00172102	0.00966907
-0.009	1.00272	0.501299	-0.000502005	0.00158126	0.00997552
-0.01	1.00278	0.50136	-0.00048243	0.0014553	0.0102657
-0.02	1.00332	0.501919	-0.000313295	0.000653806	0.0125711
-0.03	1.00377	0.502377	-0.000189347	0.000278651	0.0141957
-0.04	1.00412	0.502736	-0.00010528	9.79822E-05	0.015366
-0.05	1.00437	0.502994	1.86913E-05	-5.46252E-05	0.0161684
-0.06	1.00452	0.503152	-2.94393E-05	-8.36957E-06	0.0166441
-0.07	1.00458	0.50321	-2.06162E-05	-0.000012029	0.0168128
-0.08	1.00454	0.503168	-2.25848E-05	-4.1155E-06	0.0166807
-0.09	1.0044	0.503026	-4.00311E-05	2.51232E-05	0.0162427
-0.1	1.00416	0.502784	-8.20463E-05	0.000102888	0.0154808
-0.11	1.00383	0.502441	-0.000156733	0.000275612	0.0143567
-0.12	1.0034	0.501998	-0.000270699	0.000629719	0.0127908
-0.13	1.00287	0.501456	-0.000429358	0.00137197	0.0105817
-0.135	1.00257	0.501147	-0.00052688	0.00208554	0.00904059
-0.1375	1.00241	0.500983	-0.000580412	0.00265679	0.00803227
-0.14	1.00224	0.500813	-0.000637201	0.0036543	0.00658224
-0.141	1.00218	0.500743	-0.000660841	0.00479913	0.00525209
-0.14101	1.00218	0.500743	-0.00066108	0.00485089	0.00519846



$\varepsilon$	1	2	3	4	5
-0.14102	1.00217	0.500742	-0.00066132	0.00492832	0.00511917
-0.142	1.00211	0.500673	-0.000685015		
-0.145	1.00189	0.500454	-0.000760772		
-0.15	1.00152	0.50007	-0.00089801		
-0.16	1.0007	0.499228	-0.00121501		
-0.17	0.999783	0.498286	-0.00159096		
-0.2	0.996449	0.494862	-0.00309515		
-0.3	0.979071	0.477016	-0.0126355		
-0.4	0.952203	0.449426	-0.029761		
-0.5	0.916117	0.412372	-0.0548046		
-0.6	0.871177	0.366226	-0.0877858		
-0.7	0.817833	0.311454	-0.12853		
-0.8	0.756624	0.248607	-0.176719		
-0.9	0.688166	0.178321	-0.231916		
-1	0.613146	0.1013	-0.293586		



Σχήμα 3.59. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων  $(\varepsilon, \lambda_{cr})$  για  $a=1.5$ .



Σχήμα 3.60. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων για  $\alpha=1.50$ .

Σε χαρακτηριστικές θέσεις του παραπάνω διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων, όπως για  $\epsilon=-0.141$ ,  $\epsilon=-0.10$ ,  $\epsilon=-0.05$ ,  $\epsilon=-0.01$ ,  $\epsilon=0.0$ ,  $\epsilon=-0.000003$  υπολογίζονται οι δρόμοι ισορροπίας, και στον παρακάτω πίνακα είναι σημειωμένα όλα τα κρίσιμα σημεία (τρία οριακά σημεία), για τα οποία ισχύει ότι:

$\epsilon=0$ :

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.6208	1.00213
S2	-1.45471	0.500702
S'	-0.107737	-0.000701164



**$\varepsilon=-0.01$ :**

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.62078	1.00278
S2	-1.45473	0.50136
S'	-0.103258	-0.00048243
S3	-0.0237084	0.0014553
S4	0.0192545	0.0102657

**$\varepsilon=-0.05$ :**

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.62074	1.00437
S2	-1.45479	0.502994
S'	-0.0846641	0.0000186913
S3	-0.0569527	-0.0000546252
S4	0.0339652	0.0161684

**$\varepsilon=-0.1$ :**

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.62075	1.00416
S2	-1.45478	0.502784
S'	-0.0888338	-0.0000820463
S3	-0.0512505	0.000102888
S4	0.0324243	0.0154808

**Για  $\varepsilon=-0.141$ :**

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.6208	1.00218
S2	-1.45471	0.500743
S'	-0.107726	-0.000660841
S3	-0.00107534	0.00479913
S4	0.00106463	0.00525209

ε=-0.000003:

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.6208	1.00214
S2	-1.45471	0.500702
S'	-0.107735	-0.000701091
S3	-0.000376503	0.00490432
S4	0.000375182	0.00506344

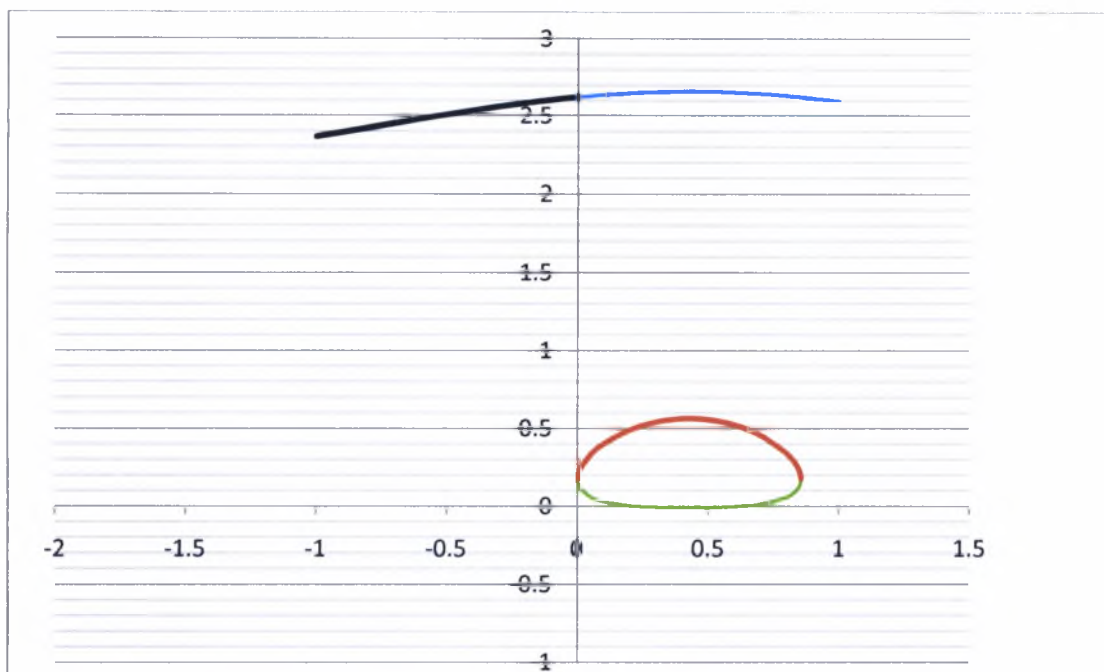
$\alpha=2.0$	$\beta=0$
--------------	-----------

ε	s	λs1	λs	C
0	2.62193			0.172388
0.000005	2.62193	0.170991	0.173789	
0.00002	2.62193	0.1696	0.175195	
0.00004	2.62193	0.16845	0.176364	
0.00006	2.62194	0.167571	0.177262	
0.00008	2.62194	0.166831	0.178022	
0.0001	2.62194	0.16618	0.178691	
0.0002	2.62196	0.163637	0.18133	
0.0003	2.62198	0.161697	0.183365	
0.002	2.62225	0.145398	0.201285	
0.004	2.62258	0.134823	0.21376	
0.006	2.6229	0.126959	0.223515	
0.008	2.62323	0.120502	0.231855	
0.01	2.62355	0.114946	0.239286	
0.05	2.62969	0.0595149	0.330473	
0.1	2.63659	0.0297467	0.4002	
0.2	2.64766	0.00350567	0.490072	
0.3	2.6549	-0.00634526	0.541143	
0.4	2.65816	-0.0094345	0.562473	
0.5	2.65737	-0.00843816	0.556488	
0.6	2.65255	-0.00264168	0.522543	
0.7	2.64381	0.0128479	0.456133	
0.8	2.63132	0.0564334	0.33956	
0.81	2.62988	0.0648777	0.322639	
0.82	2.6284	0.0750293	0.303801	
0.83	2.62688	0.0876975	0.282238	
0.84	2.62534	0.104641	0.256192	
0.85	2.62375	0.131886	0.219638	

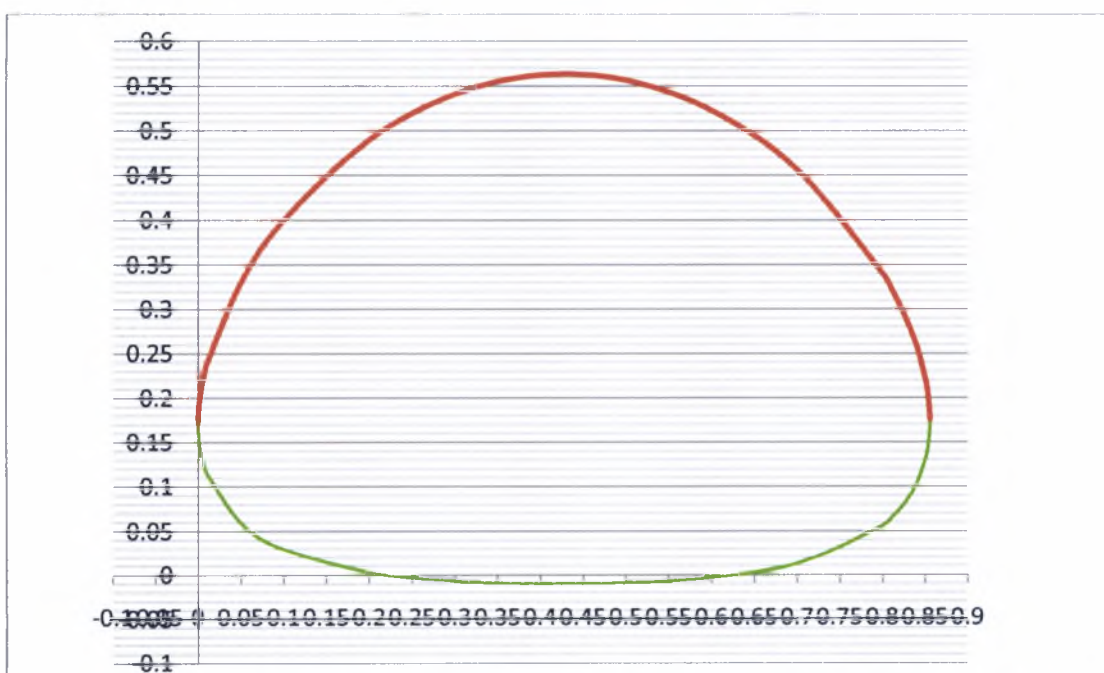
*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

$\epsilon$	s	$\lambda s1$	$\lambda s$	C
0.851	2.62359	0.136073	0.21451	
0.852	2.62343	0.140906	0.208732	
0.853	2.62327	0.146758	0.201933	
0.854	2.62311	0.154608	0.193135	
0.8541	2.6231	0.155602	0.192046	
0.8542	2.62308	0.15666	0.190893	
0.8543	2.62306	0.157795	0.189664	
0.8544	2.62305	0.159025	0.188339	
0.8545	2.62303	0.160378	0.186891	
0.8546	2.62302	0.161897	0.185276	
0.8547	2.623	0.163663	0.183415	
0.8548	2.62298	0.165849	0.181134	
0.8549	2.62297	0.169053	0.177835	
0.85492	2.62296	0.17005	0.176819	
0.85494	2.62296	0.171521	0.175329	
0.855	2.62295			
0.86	2.62214			
0.9	2.61536			
1	2.59626			

$\epsilon$	1	C
0	2.62193	0.172388
-0.01	2.62027	
-0.05	2.61334	
-0.1	2.60398	
-0.2	2.58311	
-0.3	2.55975	
-0.4	2.53437	
-0.5	2.50746	
-0.6	2.47953	
-0.7	2.45108	
-0.8	2.42262	
-0.9	2.3946	
-1	2.36746	



Σχήμα 3.60. Διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων ( $\epsilon, \lambda_{cr}$ ) για  $a=2.00$ .



Σχήμα 3.61. Λεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων για  $a=2.0$ .

Για ορισμένες τιμές του  $a$  (όχι πάντως πλησίον του  $\pi/2$ ) το σύστημα εμφανίζει λοξές αιχμές, ενώ για άλλες εκφυλισμό αυτών και προοδευτική παρουσία πολλαπλών πτυχώσεων με αξονική συμμετρία,

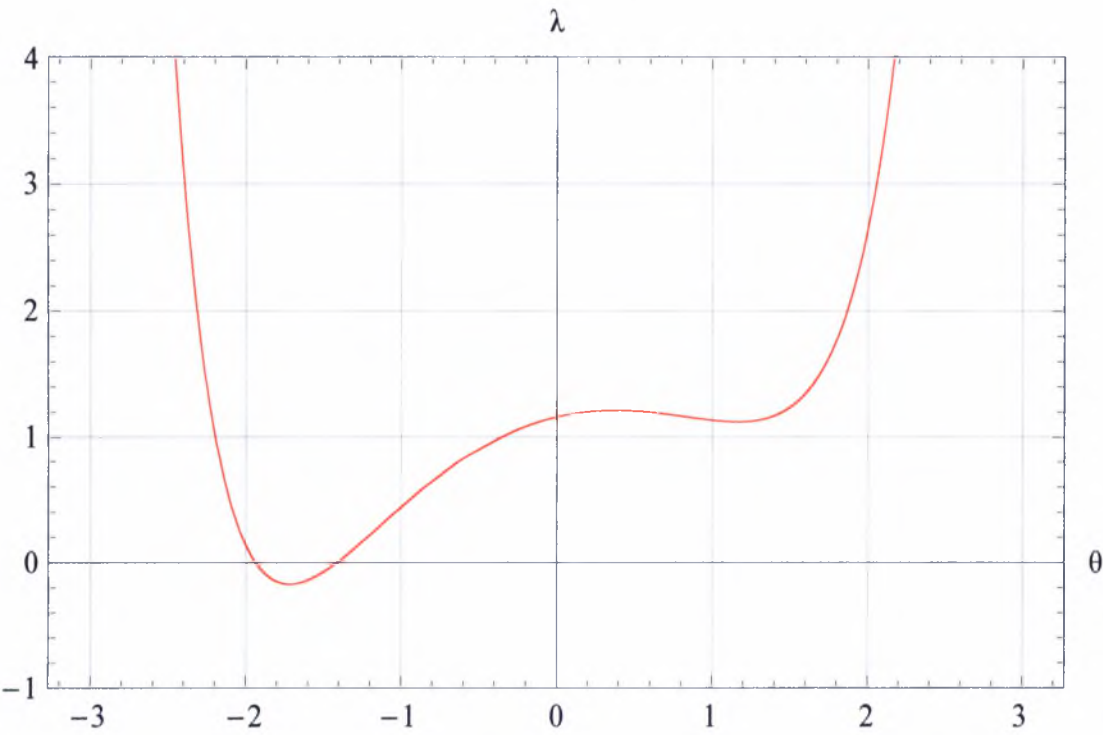
φαινόμενα τα οποία έχουν κατά κόρον αναφερθεί στη διεθνή βιβλιογραφία ως σχετιζόμενα με την ανωμαλία τύπου πεταλούδας.

3.8. Χρήση όλων των παραμέτρων ελέγχου

Εξετάζεται το ατελές σύστημα με  $a=0.20$  και  $\beta=0.20$ . Το αντίστοιχο τέλειο σύστημα εμφανίζει το δρόμο ισορροπίας που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.62. και στον παρακάτω πίνακα είναι σημειωμένα όλα τα κρίσιμα σημεία (ένα ασύμμετρο σημείο διακλάδωσης και τρία οριακά), για τα οποία ισχύει ότι:

Για  $\varepsilon=0$ :

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	1.16053
S1	1.16364	1.12183
S2	0.378295	1.21346
S'	-1.71693	-0.172731



Σχήμα 3.62. Δρόμος ισορροπίας του τέλειου συστήματος με  $a=0.20$  και  $\beta=0.20$

Διαταράσσοντας το ανωτέρω σύστημα μέσω εισαγωγής αρχικής γωνιακής απέλειας  $\varepsilon$  προκύπτει το διάγραμμα διαταραγμένων διακλαδώσεων του Σχήματος 3.63, που σχετίζεται με κρίσιμα σημεία τα στοιχεία των οποίων περιέχονται στο παρακάτω πίνακα.

$\varepsilon$	s1	c2	c3	c
0	1.21346	1.12183	-0.172731	1.16053
0.001	1.21036	1.12108	-0.173182	
0.005	1.19876	1.11806	-0.174992	
0.01	1.18555	1.11424	-0.177269	
0.015	1.17333	1.11037	-0.179563	
0.02	1.16185	1.10645	-0.181873	
0.025	1.15099	1.10248	-0.184199	
0.03	1.14064	1.09845	-0.186542	
0.035	1.13073	1.09436	-0.1889	
0.04	1.12123	1.09021	-0.191275	
0.045	1.11209	1.086	-0.193665	
0.05	1.10328	1.08171	-0.196072	
0.051	1.10156	1.08084	-0.196555	
0.052	1.09985	1.07997	-0.197039	
0.053	1.09815	1.0791	-0.197523	
0.054	1.09646	1.07823	-0.198009	
0.055	1.09479	1.07735	-0.198494	
0.056	1.09313	1.07647	-0.198981	
0.057	1.09148	1.07558	-0.199468	
0.058	1.08984	1.07469	-0.199955	
0.059	1.08821	1.0738	-0.200444	
0.06	1.0866	1.07291	-0.200933	
0.065	1.07869	1.06837	-0.203386	
0.07	1.07107	1.06374	-0.205856	
0.075	1.06374	1.05899	-0.208341	
0.08	1.05671	1.0541	-0.210842	
0.085	1.05	1.04903	-0.213358	
0.09	1.0437	1.04368	-0.215889	
0.1			-0.220997	
0.15			-0.247429	
0.2			-0.275279	
0.25			-0.304446	
0.3			-0.334818	
0.35			-0.366271	
0.4			-0.398671	
0.45			-0.431874	
0.5			-0.465726	



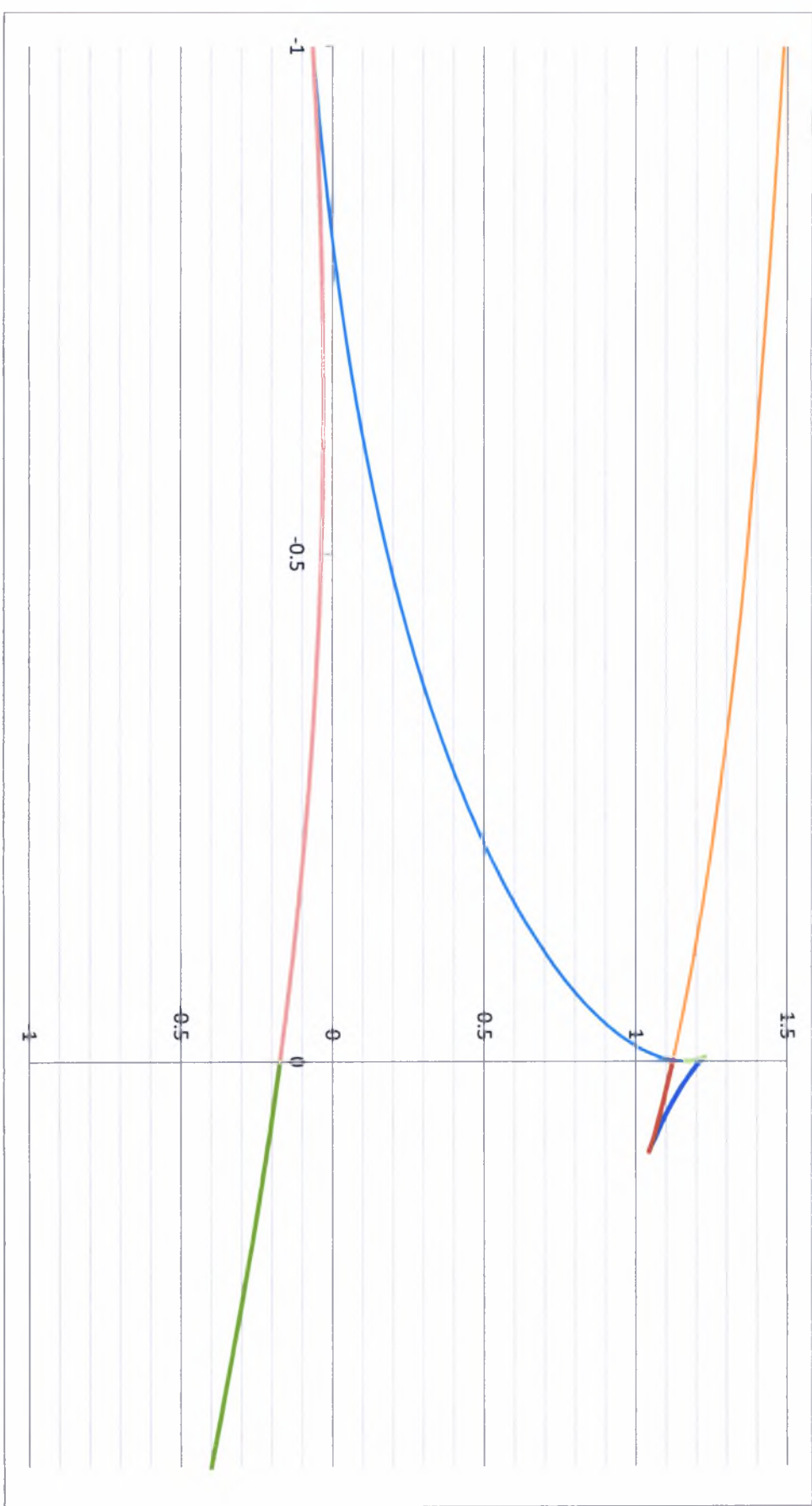
*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

<b>ε</b>	<b>s1</b>	<b>c2</b>	<b>c3</b>	<b>c</b>
0.55			-0.500064	
0.6			-0.534714	
0.65			-0.569498	
0.7			-0.604229	
0.75			-0.638715	
0.8			-0.67276	
0.85			-0.706163	
0.9			-0.738723	
0.95			-0.770236	
1			-0.800501	

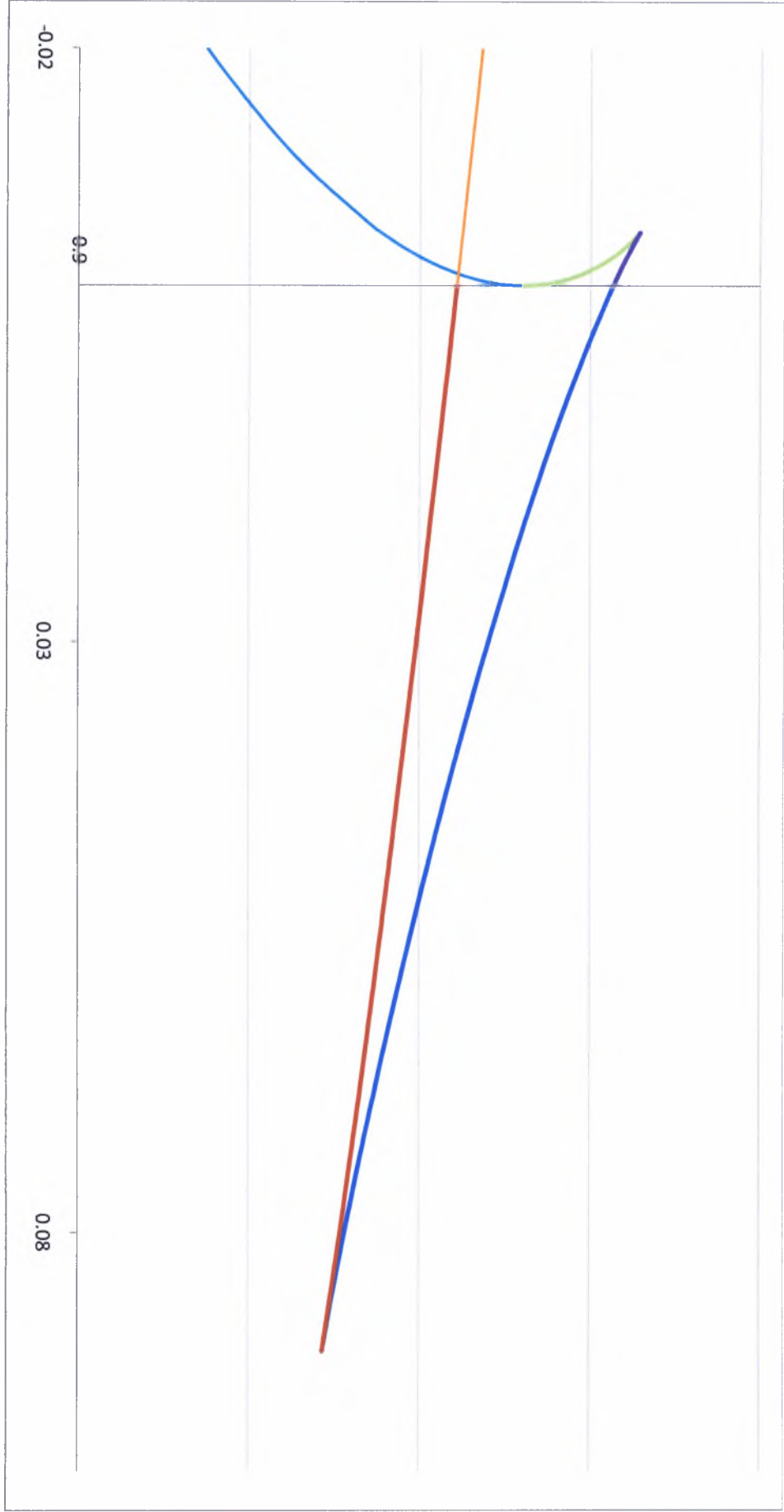
<b>ε</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
0	-0.172731	1.16053	1.12183	1.21346
-0.0001	-0.172686	1.14874	1.12191	1.21377
-0.0002	-0.172641	1.14378	1.12198	1.21409
-0.0003	-0.172596	1.13994	1.12206	1.21441
-0.0004	-0.172551	1.13668	1.12213	1.21473
-0.0005	-0.172506	1.13379	1.12221	1.21505
-0.0006	-0.172461	1.13118	1.12228	1.21537
-0.0007	-0.172416	1.12876	1.12236	1.21569
-0.0008	-0.172371	1.1265	1.12243	1.21602
-0.0009	-0.172326	1.12437	1.12251	1.21634
-0.001	-0.172281	1.12235	1.12258	1.21667
-0.0015	-0.172056	1.11343	1.12296	1.21832
-0.002	-0.171832	1.10584	1.12333	1.22001
-0.0025	-0.171607	1.09908	1.1237	1.22174
-0.003	-0.171383	1.09293	1.12407	1.22352
-0.0035	-0.171159	1.08723	1.12445	1.22536
-0.004	-0.170935	1.08189	1.12482	1.22728
-0.0045	-0.170711	1.07686	1.12519	1.22931
-0.005	-0.170487	1.07207	1.12556	
-0.01	-0.168259	1.03267	1.12924	
-0.015	-0.166048	1.00164	1.13289	
-0.02	-0.163854	0.975017	1.13649	
-0.025	-0.161676	0.951264	1.14004	
-0.03	-0.159516	0.929578	1.14357	
-0.035	-0.157372	0.90948	1.14705	
-0.04	-0.155245	0.890654	1.15049	
-0.045	-0.153135	0.87288	1.1539	
-0.05	-0.151042	0.855996	1.15728	
-0.055	-0.148966	0.839881	1.16062	
-0.06	-0.146907	0.824437	1.16392	

*N. Κέφου*  
*Μεταπτυχιακή εργασία*

<b>ε</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
-0.065	-0.144865	0.80959	1.1672	
-0.07	-0.14284	0.795275	1.17044	
-0.075	-0.140833	0.781443	1.17365	
-0.08	-0.138843	0.768048	1.17683	
-0.085	-0.136871	0.755054	1.17997	
-0.09	-0.134915	0.74243	1.18309	
-0.1	-0.131057	0.718184	1.18924	
-0.15	-0.112821	0.612341	1.21833	
-0.2	-0.0963655	0.524474	1.24496	
-0.25	-0.0817114	0.448949	1.26942	
-0.3	-0.0688693	0.382785	1.29194	
-0.35	-0.0578393	0.324149	1.31271	
-0.4	-0.0486115	0.271811	1.33191	
-0.45	-0.0411669	0.224881	1.34969	
-0.5	-0.0354773	0.182685	1.36618	
-0.55	-0.0315062	0.144688	1.38153	
-0.6	-0.0292094	0.110453	1.39586	
-0.65	-0.0285354	0.0796119	1.40929	
-0.7	-0.029427	0.0518476	1.42192	
-0.75	-0.0318219	0.0268807	1.43388	
-0.8	-0.0356552	0.00446409	1.44525	
-0.85	-0.0408618	-0.0156224	1.45615	
-0.9	-0.0473839	-0.0335697	1.46665	
-0.95	-0.0551875	-0.049527	1.47685	
-1	-0.0643317	-0.0635348	1.48682	



Σχήμα 3.63. Διάγραμμα διατεταγμένων διακλαδώσεων του συστήματος (ε.λ.α.) του Σχήματος 3.62.



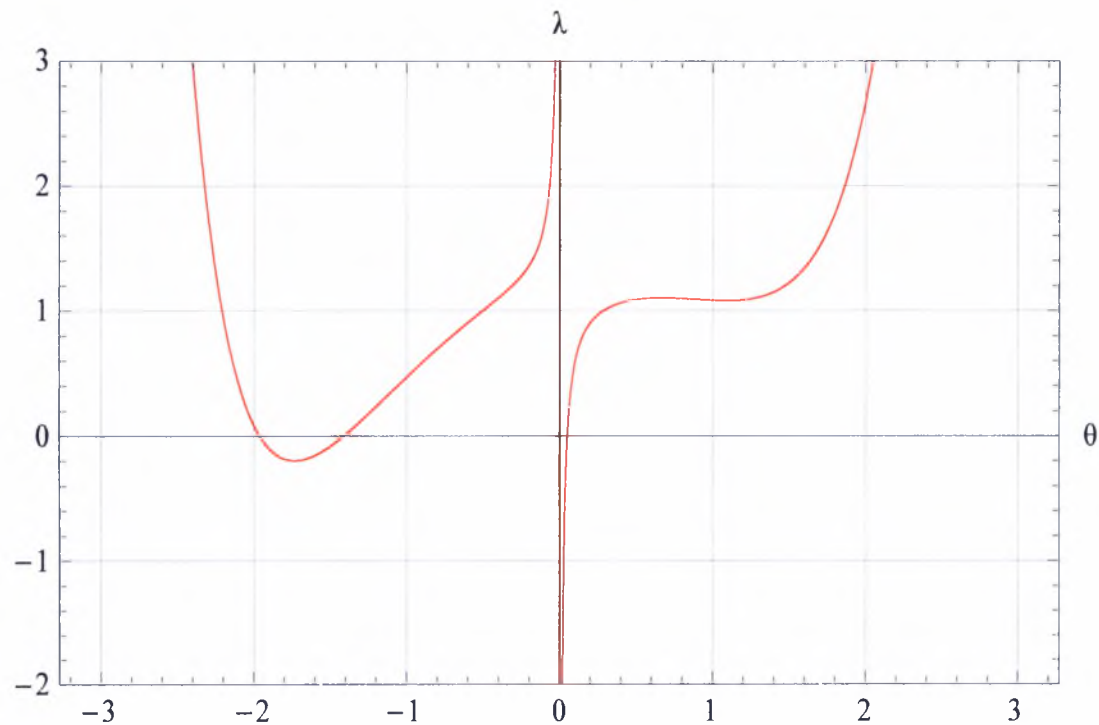
Σχήμα 3.64. Δεπτομέρεια διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων του συστήματος του Σχήματος 3.63.

*Είναι πλέον προφανής η ανωμαλία τύπου πεταλούδας.*

Σε χαρακτηριστικές θέσεις του παραπάνω διαγράμματος διαταραγμένων διακλαδώσεων, όπως για  $\varepsilon=0.05$ ,  $\varepsilon=0.09$ ,  $\varepsilon=-0.2$ ,  $\varepsilon=-1$  υπολογίζονται οι δρόμοι ισορροπίας, και στον παρακάτω πίνακα είναι σημειωμένα όλα τα κρίσιμα σημεία (τρία οριακά σημεία), για τα οποία ισχύει ότι:

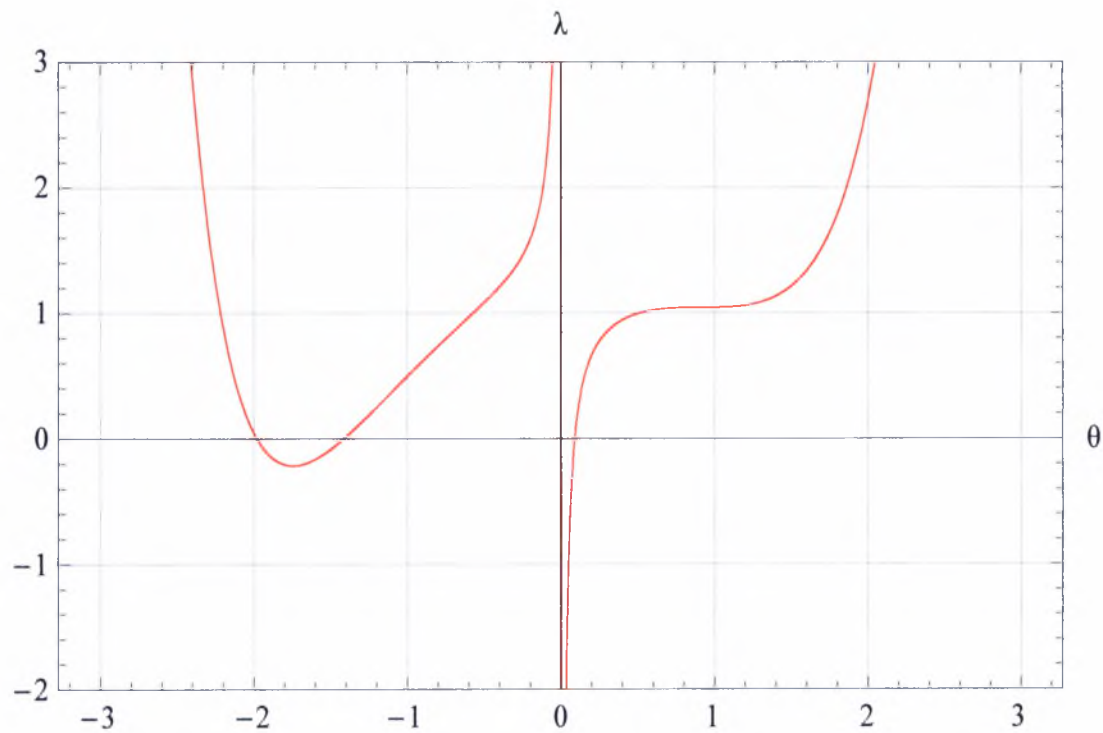
Για  $\varepsilon=0.05$ :

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	-1.7325	-0.196072
S2	1.09062	1.08171
S'	0.669823	1.10328



Για  $\epsilon=0.09$ :

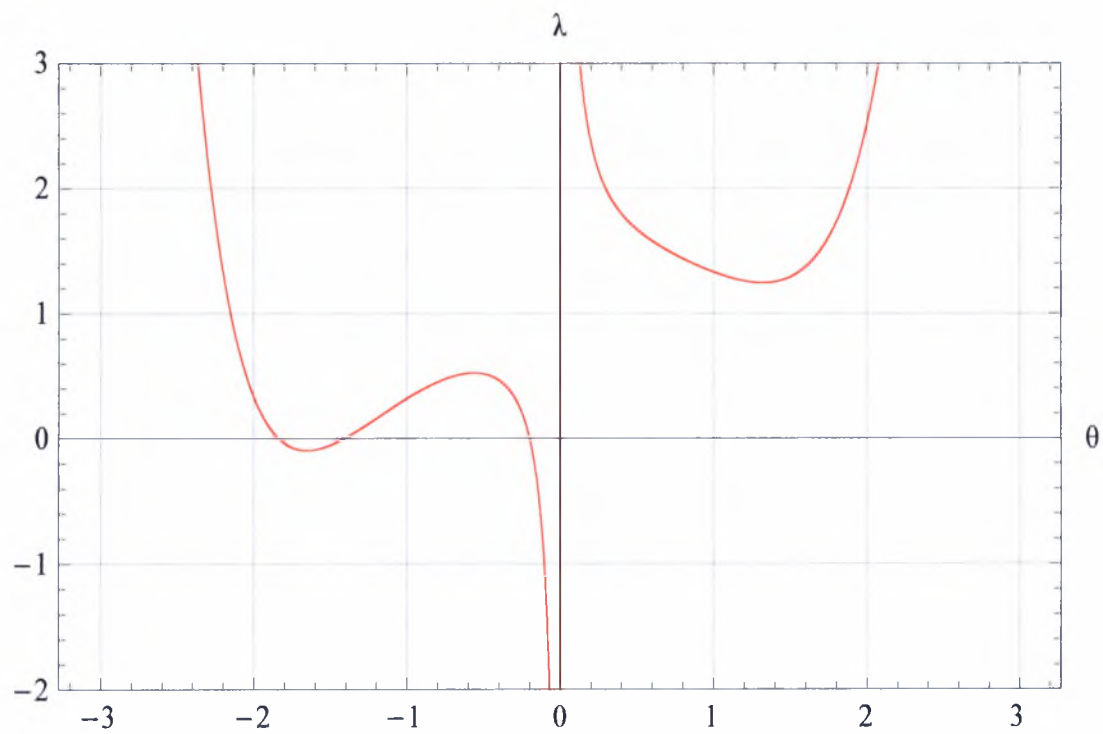
Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	-1.74473	-0.215889
S2	0.938564	1.04368
S'	0.899561	1.0437





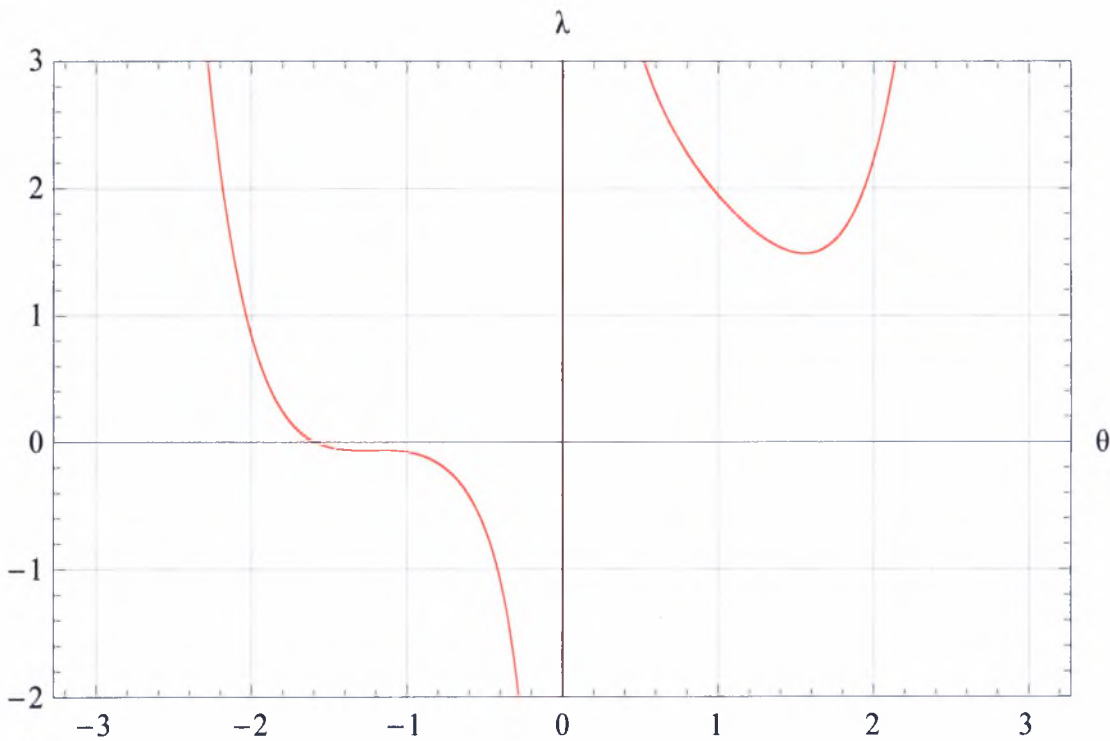
Για  $\varepsilon=-0.2$ :

Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	-1.65165	-0.0963655
S2	1.31923	1.24496
S'	-0.561397	0.524474



Για  $\varepsilon=-1$ :

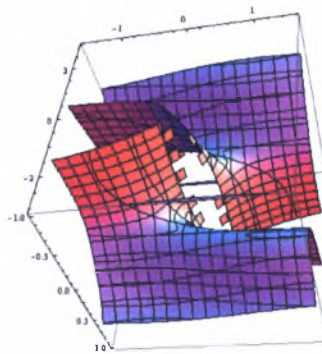
Κρίσιμο σημείο	Γωνία	Φορτίο
C	0	
S1	1.55444	1.48682
S2	-1.28914	-0.0643317
S'	-1.18275	-0.0635348



### 3.9. Επιφάνειες Πολλαπλών Καταστροφής

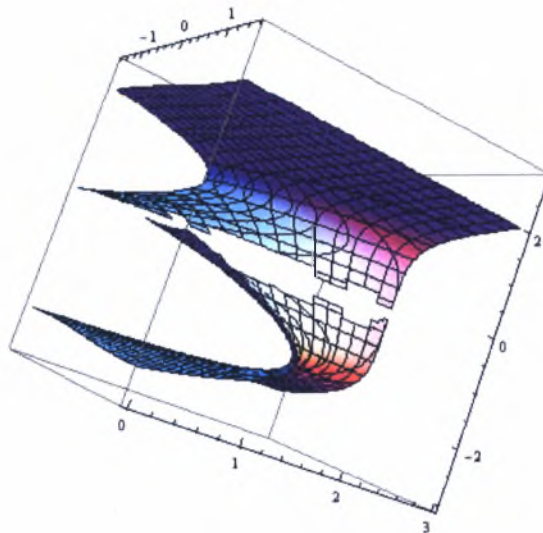
Για την περαιτέρω επικύρωση του ευρήματος ότι το σύστημα σχετίζεται με καταστροφές τύπου χελιδονοουράς και κυρίως τύπου πεταλούδας επιχειρήθηκε η τρισδιάστατη απεικόνιση τομών της υπερεπιφάνειας του πολλαπλού καταστροφής του συστήματος μέσω του Mathematica. Ορισμένα χαρακτηριστικά αποτελέσματα παρατίθενται σε ότι ακολουθεί (Οι υπολογισμοί μπορούν να ευρεθούν στο Παράρτημα).

$$M / . \beta \rightarrow 0.2, \quad S = \text{ContourPlot3D}[M, \{\alpha, -1, 1\}, \{\theta, -3, 3\}, \{\varepsilon, -1.57, 1.57\}]$$

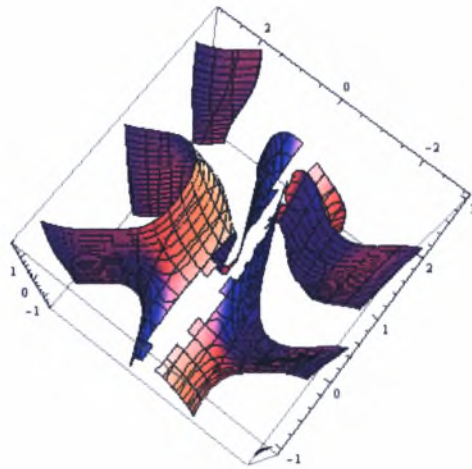


$$M/. \alpha \rightarrow 0,$$

$$S = \text{ContourPlot3D}[M, \{\beta, 0, 3\}, \{\theta, -3, 3\}, \{\varepsilon, -1.57, 1.57\}, \text{PerformanceGoal} \rightarrow \text{"Quality"}]$$



$M/\beta \rightarrow 0.2, S = \text{ContourPlot3D}[M, \{\alpha, -1, 3\}, \{\theta, -3, 3\}, \{\varepsilon, -1.57, 1.57\}]$



Από την μορφή των ως άνω διαγραμμάτων διαπιστώνεται καταρχήν η αδυναμία των υπολογιστικών πηγών που διατέθηκαν για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, πλην όμως μια προσεκτικότερη παρατήρηση ανάγει άμεσα στα πολλαπλά καταστροφής τύπου πεταλούδας.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από όλα τα ανωτέρω εκτεθέντα προκύπτει ότι το σύστημα που μελετήθηκε παρουσιάζει *τυπική συμπεριφορά καταστροφής τύπου πεταλούδας* με πληθώρα διαφορετικών κρίσιμων σημείων και σχηματισμών ισορροπίας σύμφωνα με τη διεθνή σχετική βιβλιογραφία. Το προσεγγιστικό συνολικό δυναμικό εμφανίζει συνδιάσταση τέσσερα (4) και προσδιοριστικότητα έξι (6) και ανταποκρίνεται πλήρως ως *γενική ανάπτυξη* του αρχικού συστήματος. Η όλη διαδικασία που ακολουθήθηκε θα μπορούσε να συνοδευτεί από ακριβή υπολογισμό (μέσω της διαδικασίας των μονωνύμων) της προσδιοριστικότητας, πρόβλημα το οποίο προτείνεται για μελλοντική έρευνα στα πλαίσια εκπόνησης διδακτορικής διατριβής.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Saunders D.T. *An Introduction to Catastrophe Theory*. Cambridge University Press: U.K., 1980.
2. Thompson J.M., Hunt G.W. *Elastic Instability Phenomena*. Wiley: Chichester, 1984.
3. Theocaris, P.S. (1984) : "Instability of Cantilever Beams with Non-linear Elements: Butterfly Catastrophe", *International Journal of Mechanical Sciences* **26** (4), 265 - 275.
4. Arnold VI. *Catastrophe Theory* (3<sup>rd</sup> revised and expanded edn.). Springer: Berlin, 1992.
5. Deng, C.-G. (1994) : "Equations of Bifurcation Sets of Three-Parameter Catastrophes and the Application in Imperfection Sensitivity Analysis", *International Journal of Engineering Science* **32** (11), 1811 - 1822.
6. Pacoste, C., Eriksson, A. (1995) : "Element behaviour in post-critical plane frame analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **125** (1-4), 319 - 343.
7. Gilmore R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. Dover Publications: New York 1996.
8. Poston T, Steward I. *Catastrophe Theory and its Applications*. Dover Publications: New York 1996.
9. Sophianopoulos, D.S. (1996) : "Static and Dynamic Stability of a Single-Degree-of-Freedom Autonomous System with Distinct Critical Points", *Structural Engineering and Mechanics* **4** (5), 529 - 540.
10. Pacoste, C., Eriksson, A. (1997) : "Beam Elements in instability problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **144** (1-2), 163 - 197.
11. Carricato, M., Duffy, J., Parenti-Castelli, V. (2002) : "Catastrophe analysis of a planar system with flexural pivots", *Mechanism and Machine Theory* **37** (7), 693 - 716.
12. Lignos, X., Ioannidis, G., Kounadis, A.N. (2003): "Non-linear buckling of simple models with tilted cusp catastrophe", *International Journal of Non-linear Mechanics* **38** (8), 1163 - 1172.
13. Lengyel, A., You, Z., (2004) : "Bifurcations of SDOF mechanisms using catastrophe theory", *International Journal of Solids and Structures* **41** (2), 559 - 568.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000073825



